IESE
Universidad de Navarra
Barcelona-Madrid

0-297-242
FN-425

UTILIZACION DE LA FORMULA DE BLACK Y SCHOLES PARA VALORAR OPCIONES (*)

1. Fórmula de Black y Scholes

La fórmula de Black y Scholes para valorar opciones que no reparten dividendos es:

$$C = S\ N(x) - K\ r^{-t}\ N(x - \sigma \sqrt{t})$$

$$\text{siendo } x = \frac{\mathrm{Ln}\,(S / K\ r^{-t})}{\sigma \sqrt{t}} + \sigma \sqrt{t} / 2$$

T =	0	t
	Hoy	Fecha de ejercicio

– C = Precio de la opción de compra hoy (T = 0) en pesetas.
– t = Período de vigencia de la opción de compra.
– r = 1 + tasa de interés sin riesgo entre T = 0 y t. En otras palabras, r es el número de pesetas que tendremos en t invirtiendo 1 peseta hoy en deuda sin riesgo.
– σ = Volatilidad anual de la acción en tanto por uno. Así, si la volatilidad de la acción es 20%, introduciremos $\sigma = 0{,}2$.
– K = Precio de ejercicio de la opción de compra en pesetas.
– S = Precio de la acción en t = 0 en pesetas.
– N(x) = Valor de la función de probabilidad acumulada de una distribución normal estándar.

(*) Nota técnica de la División de Investigación del IESE.
Preparada por el profesor Pablo Fernández. Julio de 1997.

Ultima edición: 1/98

2. Uso de la fórmula de Black y Scholes

Ya tenemos la fórmula de Black y Scholes, y ahora en esta sección vamos a ver cómo podemos utilizarla. En primer lugar, vamos a aplicar la fórmula suponiendo que tenemos todos los datos necesarios, y a continuación veremos cómo obtenemos los datos y de dónde los derivamos.

Todas las operaciones incluidas en la fórmula de Black y Scholes son muy fáciles de realizar, con excepción de la función N (x).

Sabemos que N (x) es una integral que no tiene una solución explícita. Sin embargo, la mayoría de los libros de estadística contienen tablas con la función de probabilidad acumulada de una distribución normal. También existen aproximaciones polinómicas a la fórmula. Describimos a continuación dos de ellas:

Aproximación polinómica 1 para calcular N (x):

$$\text{Para } x \geq 0\text{: } N(x) = 1 - N'(x)\,[a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3], \tag{1}$$

donde: $k = 1 / (1 + W x)$; $W = 0{,}33267$; $a_1 = 0{,}4361836$; $a_2 = -0{,}1201676$;

$a_3 = 0{,}937298$; $N'(x) = (2\pi)^{-1/2}\, e^{-x^2/2}$

Nótese que la fórmula es aproximada para $x \geq 0$ únicamente. Para $x < 0$ debe hacerse uso de la propiedad $N(-x) = 1 - N(x)$. Esta aproximación es correcta hasta la cuarta cifra decimal.

Aproximación polinómica 2 para calcular N (x)

$$\text{Para } x > 0\text{: } N(x) = 1 - N'(x)\,[b_1 k + b_2 k^2 + b_3 k^3 + b_4 k^4 + b_5 k^5] \tag{2}$$

donde: $k = 1 / (1 + W x)$; $W = 0{,}2316419$; $b_1 = 0{,}31938153$; $b_2 = -0{,}356563782$;

$b_3 = 1{,}781477937$; $b_4 = -1{,}821255978$; $b_5 = 1{,}330274429$; $N'(x) = (2\pi)^{-1/2}\, e^{-x^2/2}$

Nótese que esta fórmula es también aproximada únicamente para $x > 0$. Para $x < 0$ se hace uso de la propiedad $N(-x) = 1 - N(x)$. Esta aproximación es correcta hasta la sexta cifra decimal y es la que utilizamos en los cálculos que vienen a continuación.

Ejemplo. Cálculo del valor de una opción de compra con 3 meses de vigor (la opción se podrá ejercer cualquier día hasta dentro de 3 meses) con precio de ejercicio de 400 pesetas. El precio de la acción hoy es 500 pesetas; la volatilidad anual esperada es del 30% (0,3), y el tipo de interés sin riesgo a 3 meses anualizado es del 10%. La acción no pagará dividendos durante los próximos 3 meses.

Tenemos todos los datos precisos para calcular el valor de la opción:
$S = 500$; $K = 400$; $\sigma = 0{,}3$; $r = 1{,}1$ y $t = 0{,}25$; $\sigma \sqrt{t} = 0{,}15$;
$S / K r^{-t} = 1{,}2801421113556$; $x = 1{,}7214739751$; $x - \sigma\sqrt{t} = 1{,}5714739751$;
$N(x) = 0{,}9574176$; $N(x - \sigma\sqrt{t}) = 0{,}9419637$
El valor de la opción de compra, por consiguiente, es:
$C = 500 \times 0{,}9574176 - 400 \times 1{,}1^{-0{,}25} \times 0{,}9419637 = 110{,}80$ pesetas.

Estos cálculos pueden realizarse muy fácilmente con una calculadora programable o con una hoja electrónica. El Apéndice 1 contiene el programa que permite calcular el valor de una opción en una calculadora HP 12C.

Ejemplo. Calcular el valor de una «call» sobre una acción de IBM que tiene un precio de ejercicio de 45 dólares y fecha de ejercicio dentro de 156 días. La cotización actual de la acción de IBM es de 44 dólares, y la tasa de interés sin riesgo anual es 7%. La volatilidad esperada de la acción de IBM es 0,31. No se esperan dividendos de dicha acción durante los próximos seis meses. Aplicando la fórmula de Black y Scholes, resulta: «call» = 3,68 dólares.

3. Influencia de los parámetros en el valor de la opción

Al tratar de cuantificar la sensibilidad del valor de la opción respecto a la variación de alguno de los parámetros, utilizaremos las Tablas 1 a 5, y también daremos la cuantificación más matemática, que viene dada por la derivada parcial del valor de la opción con respecto a la variable que estamos examinando.

Las Tablas 1, 2, 3, 4 y 5 muestran cómo cambia el valor de la opción cuando cambian los parámetros que la caracterizan.

La Tabla 1 es la tabla base a la que irán referidas las demás. Nótese cómo en la Tabla 1, para el tipo de interés igual a 10% y el precio de ejercicio de 400 pesetas, el valor de la «call» es 110,80, como habíamos obtenido anteriormente.

Tabla 1. Valores de distintas opciones de compra
(El valor de la opción se calcula utilizando la fórmula de Black y Scholes)

			r		
K	**1,03**	**1,05**	**1,10**	**1,15**	**1,20**
300	202,21	203,64	207,07	210,30	213,37
400	104,74	106,51	110,80	114,88	118,78
500	31,66	32,84	35,80	38,76	41,70
600	4,91	5,23	6,05	6,94	7,88
700	0,44	0,48	0,59	0,72	0,86

S = 500 pesetas; **t = 0,25 años**; σ = 0,3

Tabla 2. Valores de distintas opciones de compra
(El valor de la opción se calcula utilizando la fórmula de Black y Scholes)

			r		
K	**1,03**	**1,05**	**1,10**	**1,15**	**1,20**
300	204,58	207,38	214,07	220,32	226,19
400	112,04	115,24	123,03	130,48	137,61
500	45,69	48,03	53,92	59,87	65,83
600	14,07	15,15	18,02	21,11	24,40
700	3,50	3,86	4,87	6,02	7,32

S = 500 pesetas; **t = 0,5 años**; σ = 0,3

1. t, tiempo hasta la fecha de ejercicio

La única diferencia entre las Tablas 1 y 2 es el tiempo hasta la expiración. Las opciones de la Tabla 1 tienen un tiempo hasta la expiración de tres meses, mientras que las opciones de la Tabla 2 tienen un tiempo hasta la expiración de 6 meses. Nótese cómo el precio de las opciones de la Tabla 2 es superior al precio de las opciones de la Tabla 1 con iguales características (excepto el tiempo hasta la expiración). Este resultado es acorde con la intuición de que una opción tendrá más valor cuanto mayor sea su período de vigencia.

Para una cuantificación más exacta de cómo cambia el precio de la opción con respecto al tiempo hasta la expiración, necesitamos calcular la derivada parcial de la fórmula de Black y Scholes con respecto al tiempo, la cual viene dada por la expresión (1): $\partial C / \partial t = S\, \sigma\, N'(x) / (2 \sqrt{t}) + K\, r^{-t}\, Ln(r)\, N(x - \sigma \sqrt{t}) > 0$.

Nótese como:

cuando $t \longrightarrow 0$, entonces $C \longrightarrow MAX\,[S - K, 0]$;
cuando $t \longrightarrow \infty$, entonces $C \longrightarrow S$.

Demostración: – Si $t = 0$; entonces $r^{-t} = 1$, y

$$x = \lim_{t \to 0} [Ln(S) - Ln(K) + t\, Ln(r) + (1/2)\, \sigma^2 t] / [\sigma \sqrt{t}] = \begin{cases} +\infty & \text{si } S > K \\ -\infty & \text{si } S < K \end{cases}$$

$N(+\infty) = 1$ y $N(-\infty) = 0$. Por tanto: $C = S - K$ si $S > K$, y $C = 0$ si $S < K$.
– Si $t = \infty$; entonces $r^{-\infty} = 0$, y

$$x = \lim_{t \to \infty} [Ln(S) - Ln(K) + t\, Ln(r) + 0{,}5\, \sigma^2 t] / [\sigma \sqrt{t}] = \infty.$$ Como $N(\infty) = 1$, $C = S$.

2. r, tasa de interés

En todas las Tablas vemos cómo el precio de la opción aumenta cuando aumenta el tipo de interés. La intuición detrás de esto es muy sencilla: el valor actual neto del precio de ejercicio es menor cuanto mayor es el tipo de interés y, por consiguiente, mayor es el precio de la opción de compra.

Para cuantificar más exactamente la variación del precio de la opción cuando varía la tasa de interés, hacemos la derivada parcial de la fórmula de Black y Scholes con respecto al tipo de interés (2): $\partial C / \partial r = t\, K\, r^{-(t+1)}\, N(x - \sigma \sqrt{t}) > 0$.

Cuando $r \longrightarrow \infty$, entonces $C \longrightarrow S$.

Demostración: cuando $r \longrightarrow 0$, $x \longrightarrow \infty$ y $N(x) = 1$. Igualmente:

Cuando $r \longrightarrow \infty$, $r^{-t} \longrightarrow 0$. Por tanto: $C \longrightarrow S$.

(1) Se suele denominar Theta = $\partial C / \partial t$.
(2) Se suele denominar Rho = $\partial C / \partial r$.

La intuición detrás de este resultado es que cuando el tipo de interés tiende a infinito, el valor actual neto del precio de ejercicio es cero, con lo cual el valor de la opción será igual al precio de la acción.

3. K, precio de ejercicio

En las Tablas 1 a 4 podemos observar cómo el precio de la opción disminuye cuando aumenta el precio del ejercicio. Este resultado es intuitivamente evidente, puesto que cuanto más tengamos que pagar por la misma acción en la fecha de ejercicio, menor será el precio de la opción correspondiente. La cuantificación más exacta de la variación del precio de la opción cuando cambia el precio del ejercicio viene dada por: $\partial C / \partial K = - r^{-t} N (x - \sigma \sqrt{t}) < 0$.

Cuando $K \longrightarrow 0$, entonces $C \longrightarrow S$; y cuando $K \longrightarrow \infty$, entonces $C \longrightarrow 0$.

Demostración: cuando $K = 0$, entonces $x = \infty$, porque $\mathrm{Ln}\,(0) = -\infty$; $N(\infty) = 1$ y $C = S$. Cuando $K = \infty$, entonces $x = -\infty$, $N(-\infty) = 0$.

Por otro lado; $\lim_{K \longrightarrow \infty} K\, N(-\ln K) = 0$. Por consiguiente $C \longrightarrow 0$.

La intuición detrás de estos resultados es la siguiente: cuando K = 0, no hemos de pagar nada para hacernos con una acción en el futuro. Como el valor actual neto del precio de la acción en la fecha de ejercicio es el precio de la acción hoy, es claro que una opción de compra es equivalente a poseer una acción y, por tanto, C = S.

Cuando K tiende a infinito, quiere decir que hemos de pagar una cantidad en la fecha de ejercicio, que con seguridad será superior al precio de la acción; por consiguiente, nunca ejerceremos esa opción, por lo cual su valor es cero.

4. σ, volatilidad

La única diferencia entre la Tabla 3 y la 1 es la volatilidad de la acción. La Tabla 3 es 50%, mientras que la Tabla 1 es 30%. Podemos observar cómo el precio de la opción es mayor cuanto mayor es la volatilidad. Una volatilidad mayor implica una mayor probabilidad de valores altos y valores bajos de la acción en la fecha de ejercicio. Comoquiera que el poseedor de la opción no está obligado a ejercitarla, esto quiere decir que se beneficiará de la probabilidad mayor de valores altos o se verá perjudicado por la probabilidad mayor de valores más bajos en el precio de la acción; por consiguiente, una mayor volatilidad implica un mayor precio de la opción.

Tabla 3. Valores de distintas opciones de compra
(El valor de la opción se calcula utilizando la fórmula de Black y Scholes)

	r				
K	**1,03**	**1,05**	**1,10**	**1,15**	**1,20**
300	202,88	204,27	207,62	210,79	213,79
400	113,63	115,14	118,79	122,30	125,66
500	51,42	52,53	55,26	57,94	60,57
600	19,42	20,01	21,50	22,99	24,49
700	6,44	6,70	7,35	8,01	8,69

S = 500 pesetas; t = 0,25 años; σ **= 0,5**

Para cuantificar más exactamente la variación el precio de la opción cuando se produce un cambio en la volatilidad, derivamos la expresión de Black y Scholes con respecto a la volatilidad (1): $\partial C / \partial \sigma = S \sqrt{t} N'(x) > 0$.

Cuando $\sigma \longrightarrow 0$, entonces $C \longrightarrow \text{Max}[S - K r^{-t}, 0]$
Cuando $\sigma \longrightarrow \infty$, entonces $C \longrightarrow So$.

Demostración:
– Si $\sigma = 0$, entonces: $x = +\infty$ si $S > K r^{-t}$ y
$= -\infty$ si $S < K r^{-t}$.

Por tanto, $N(x) = 1$ si $So > K r^{-t}$
$= 0$ si $So < K r^{-t}$, y $C = \text{Max}[So - K r^{-t}, 0]$

– Si $\sigma \longrightarrow \infty$, entonces $x \longrightarrow +\infty$ y $x + \sigma\sqrt{t} \longrightarrow -\infty$.
Como $N(\infty) = 1$ y $N(-\infty) = 0$, entonces $C = So$.

Cuando la volatilidad de la acción es cero, podemos considerar la acción como un instrumento de renta fija, ya que si $\sigma = 0$, la acción carece de riesgo. El valor actual neto del precio a pagar en la fecha de ejercicio es $K r^{-t}$, y el valor actual neto del precio de la acción en la fecha de ejercicio es, por definición, el precio de la acción hoy; por consiguiente: $C = \text{Max}[S - K r^{-t}, 0]$.

Cuando la volatilidad tiende a infinito, el precio de la opción tiende hacia el precio de la acción, porque su valor actual neto del precio de ejercicio pasa a ser insignificante con respecto al valor actual neto del precio de la acción en la fecha de ejercicio.

5. S, precio de la acción

En la Tabla 4 hemos incrementado el precio de la acción con respecto a la Tabla 1. Nótese cómo el precio de la opción es superior en la Tabla 4. La intuición detrás de este resultado es que siendo todas las demás características iguales, cuanto mayor es el precio de la acción hoy mayor es la probabilidad de que sea también mayor el precio de la acción en la fecha de ejercicio.

Tabla 4. Valores de distintas opciones de compra
(El valor de la opción se calcula utilizando la fórmula de Black y Scholes)

	r				
K	**1,03**	**1,05**	**1,10**	**1,15**	**1,20**
300	302,21	303,64	307,06	310,30	313,37
400	203,01	204,91	209,46	213,77	217,85
500	107,69	109,80	114,92	119,82	124,53
600	37,99	39,41	42,96	46,51	50,04
700	8,39	8,89	10,19	11,57	13,02

S = 600 pesetas; t = 0,25 años; $\sigma = 0{,}3$

(1) Se suele denominar Vega = $\partial C / \partial \sigma$.

La expresión de la derivada parcial de la fórmula de Black y Scholes con respecto al precio de la acción tiene mucha importancia en la construcción de una cartera réplica, como veremos más adelante, y se denomina delta.

Delta = $\Delta = \partial C / \partial S = N(x) > 0$

Cuando S —> 0, entonces C —> 0 y Δ —> 0
Cuando S —> ∞, entonces C —> ∞ y Δ —> 1.

Demostración: cuando S —> 0, entonces x —> $-\infty$ porque Ln (0) = $-\infty$.
Por tanto, C = 0. Cuando S —> ∞, entonces x —> $+\infty$ y C —> ∞.

Cuando el valor de la acción tiende a cero (la empresa está en quiebra), entonces el precio de la opción de compra también es, lógicamente, cero.

Cuando el valor de la acción tiende a infinito, el valor actual neto del precio del ejercicio es una cantidad despreciable con respecto al precio de la acción y, por consiguiente, el precio de la opción tiende también a infinito.

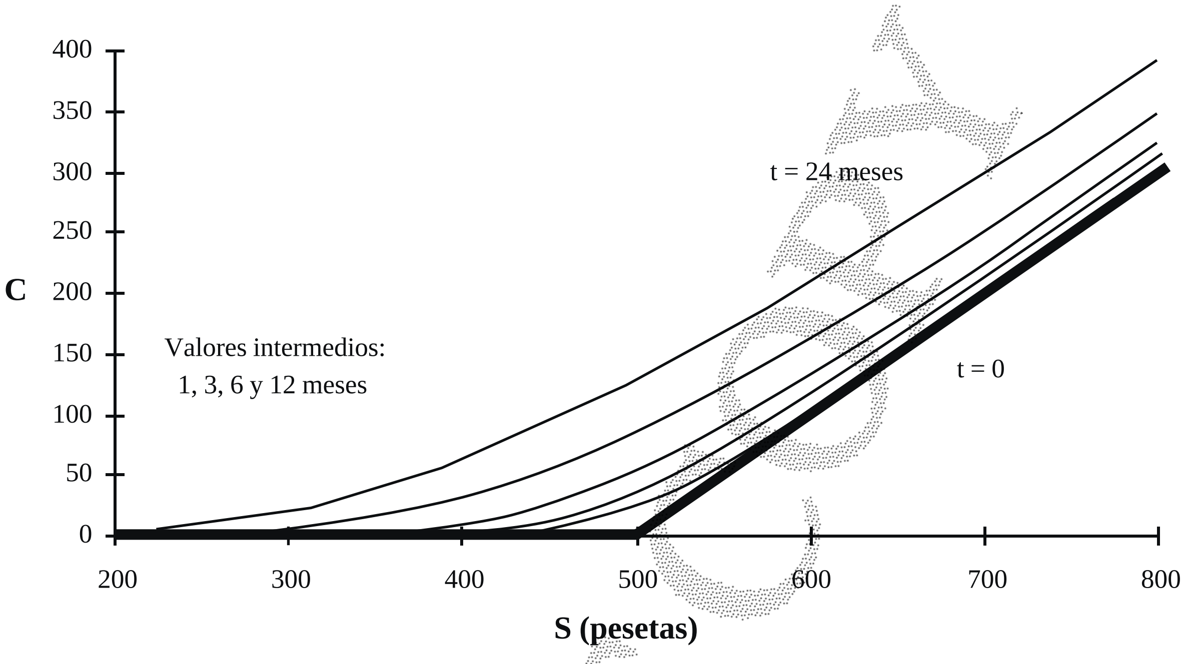
Tabla 5. Valores de una «call» (pesetas) según la fórmula de Black y Scholes)
r = 1,1; K = 500 pesetas; σ = 30%

	t				
S (pesetas)	**1 mes**	**3 meses**	**6 meses**	**12 meses**	**24 meses**
	0,0833 años	*0,25 años*	*0,50 años*	*1,00 año*	*2,00 años*
200	0,00	0,00	0,00	0,08	2,14
250	0,00	0,00	0,02	0,87	7,78
300	0,00	0,01	0,41	4,16	19,18
350	0,00	0,29	2,79	12,58	37,26
400	0,08	2,83	10,57	28,19	61,90
450	2,67	12,97	27,21	51,68	92,33
500	19,25	35,80	53,92	82,46	127,57
550	56,53	71,20	89,43	119,18	166,60
600	104,19	114,92	131,27	160,36	208,52
650	153,97	162,69	177,03	204,68	252,62
700	203,96	212,01	224,96	251,10	298,33
750	253,96	261,83	274,01	298,88	345,21
800	303,96	311,79	323,58	347,52	392,94

La Tabla 5 nos muestra la variación del precio de una opción cuando cambia el precio de la acción y el tiempo hasta el ejercicio. Los resultados son los apuntados ya anteriormente.

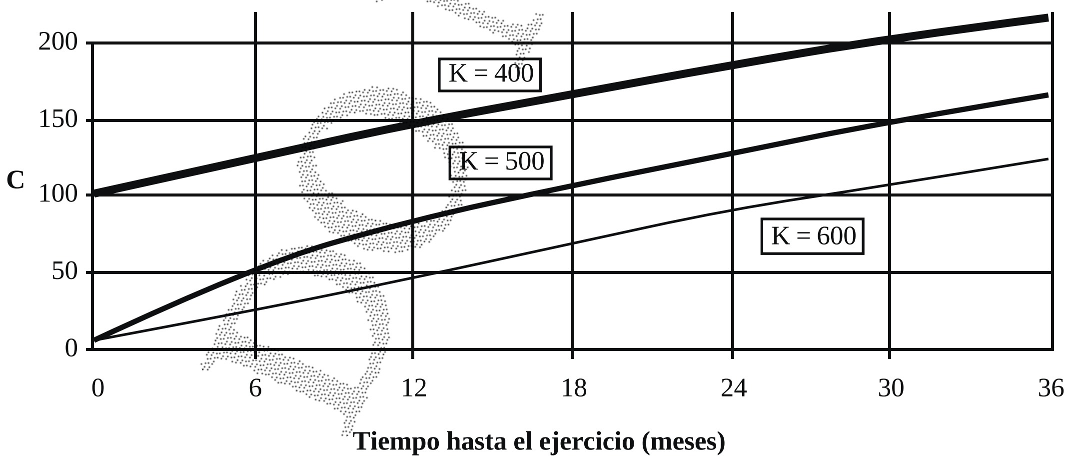
La Figura 1 muestra la representación gráfica de la Tabla 5.

Figura 1. Valor de una opción de compra según la fórmula de Black y Scholes
r = 1,1;   K = 500 pesetas;   Volatilidad = 30%



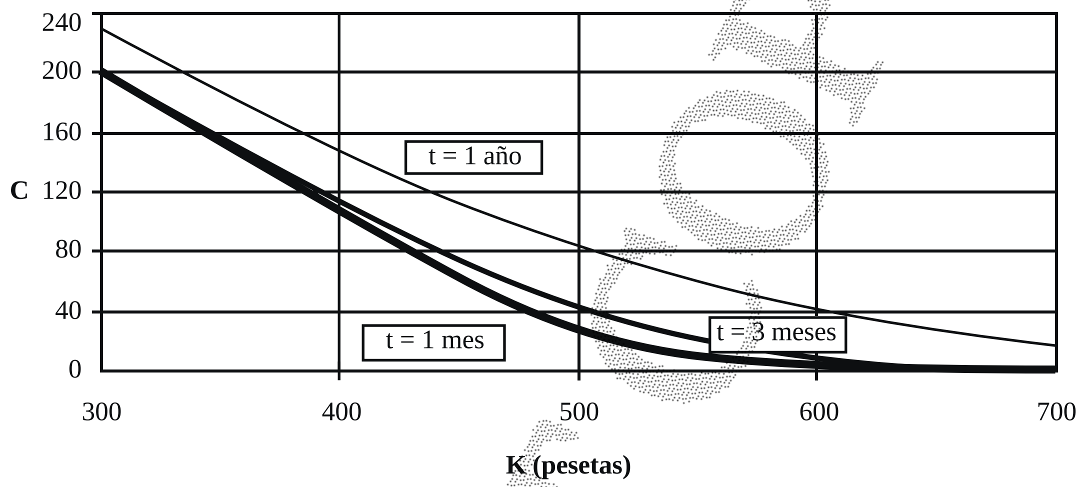
En la Figura 2 se observa la evolución creciente del valor de la opción de compra europea a medida que mayor es el tiempo que transcurre hasta el ejercicio de la misma. También se puede ver que, para un número determinado de meses hasta el vencimiento, el valor de la opción de compra es mayor conforme menor es el precio de ejercicio.

Figura 2. Valor de una «call» según la fórmula de Black y Scholes
S = 500 pesetas; r = 1,1; Volatilidad= 30%
La línea intermedia corresponde a una «call at the money» (K = 500)



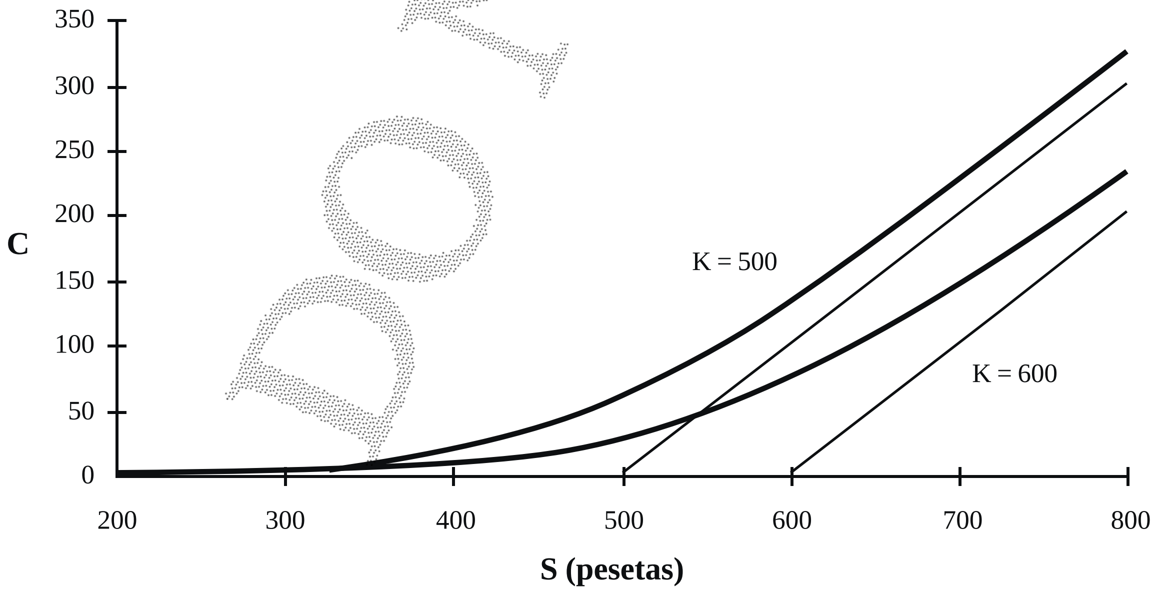
Precisamente, la Figura 3 muestra también cómo afecta, en términos de menor valor de la opción de compra, el hecho de ir aumentando el precio de ejercicio de la misma. También se observa que, dado un determinado precio de ejercicio, la opción de compra a la que le falta más tiempo hasta el vencimiento es la que tiene un mayor valor.

Figura 3. Valor de una «call» europea según la fórmula de Black y Scholes
S = 500 pesetas; σ = 30%; r = 1,1



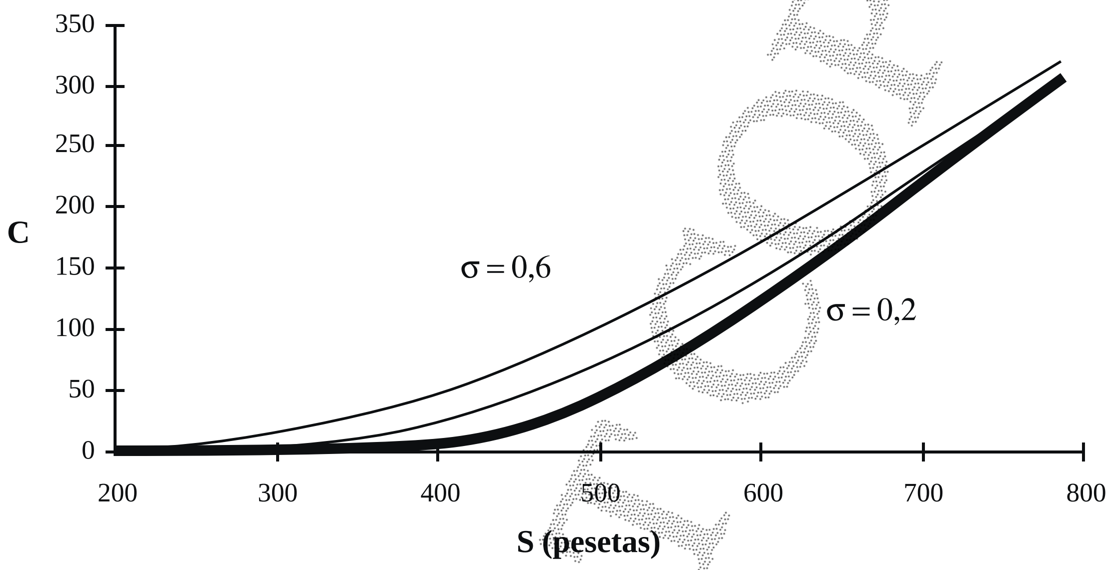
La Figura 4 muestra la diferencia entre el precio de dos opciones que son iguales en todos sus parámetros, excepto en el precio de ejercicio. Una de ellas tiene el precio de ejercicio de 500 ptas., y otra, de 600 ptas. Nótese cómo siempre la opción con precio de ejercicio de 500 ptas. tiene un valor superior al de la opción con precio de ejercicio de 600 ptas.

Figura 4. Valor de una «call» según la fórmula de Black y Scholes
r = 1,1; t = 6 meses; Volatilidad = 0,3



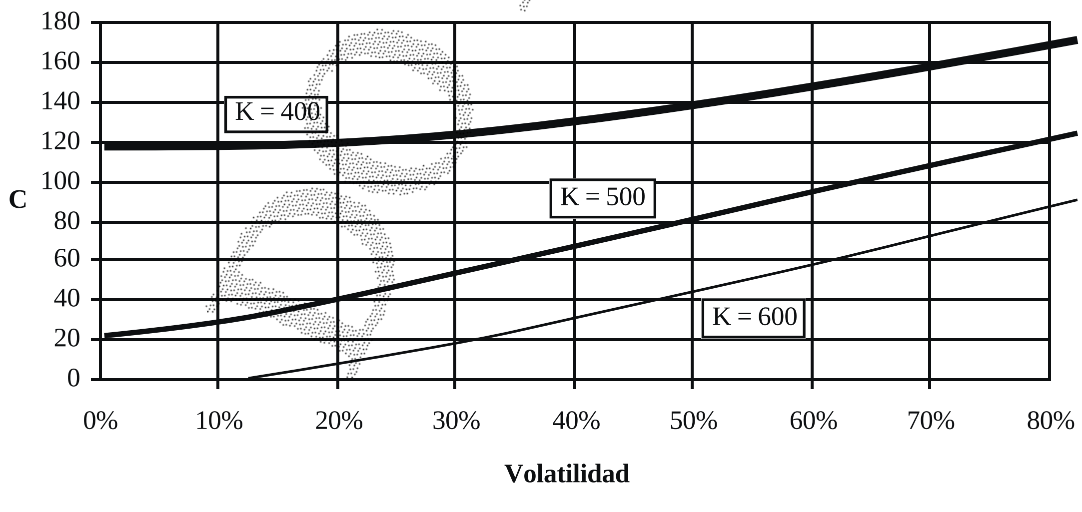
La Figura 5 nos muestra los valores correspondientes a tres opciones que difieren únicamente en la volatilidad de la acción a la que se refiere; las volatilidades son 0,2, 0,4 y 0,6. Nótese cómo cuanto mayor es la volatilidad, mayor es el precio de la opción si consideramos los demás parámetros constantes.

Figura 5. Valor de una «call» según la fórmula de Black y Scholes
r = 1,1; K = 500 pesetas; t = 6 meses



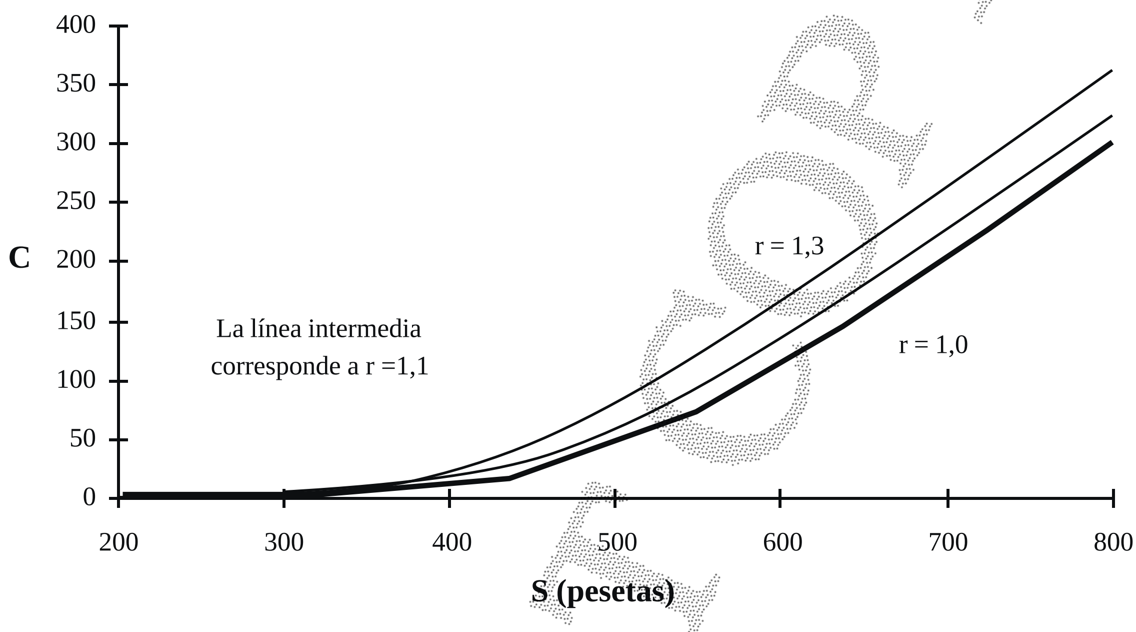
La Figura 6 muestra la evolución en el valor de una opción de compra en relación a la volatilidad de la acción a la que se refiere: cuanto mayor es la volatilidad, mayor es el valor de la opción. Nótese que la influencia de la volatilidad es mayor conforme mayor es el precio de ejercicio de la opción.

Figura 6. Valor de una «call» europea según la fórmula de Black y Scholes
S = 500 pesetas; r = 1,1; t = 6 meses



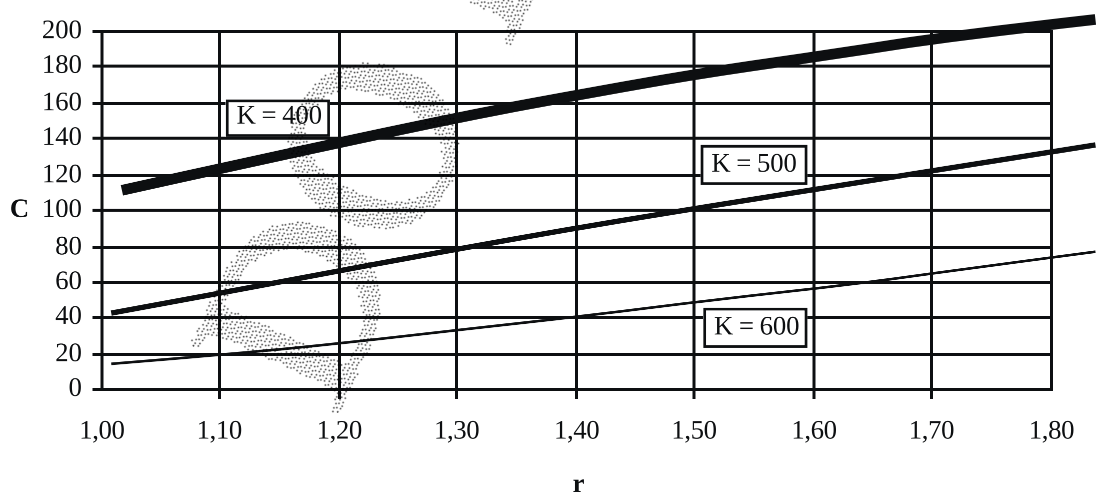
La Figura 7 muestra la influencia del tipo de interés en el valor de la opción de compra. Nótese de nuevo cómo cuanto mayor es el tipo de interés, mayor es el valor de la opción de compra.

Figura 7. Valor de una «call» según la fórmula de Black y Scholes
t = 6 meses;   K = 500 pesetas;   Volatilidad = 0,3



En la Figura 8 también se observa la forma en la que afecta el tipo de interés al valor de la opción de compra: éste crece conforme aumenta el tipo de interés, siendo el incremento más acusado conforme menor es el precio de ejercicio de la opción.

Figura 8. Valor de una «call» europea según la fórmula de Black y Scholes
S = 500 pesetas; t = 6 meses; σ = 30%



4. Cartera réplica equivalente a la opción de compra

La derivación de la fórmula de Black y Scholes se basa en que es posible formar una cartera con acciones y bonos que constituye una perfecta réplica de una opción de compra. Esta cartera se ha de ir modificando según cambia el valor de la acción, y también con el transcurso del tiempo. La cartera réplica de una opción de compra está compuesta en todo momento por acciones y por dinero prestado, o, lo que es lo mismo, bonos vendidos a crédito (1). Es importante señalar de nuevo que con las hipótesis bajo las que se ha derivado la fórmula de Black y Scholes, la cartera réplica es factible de construirse.

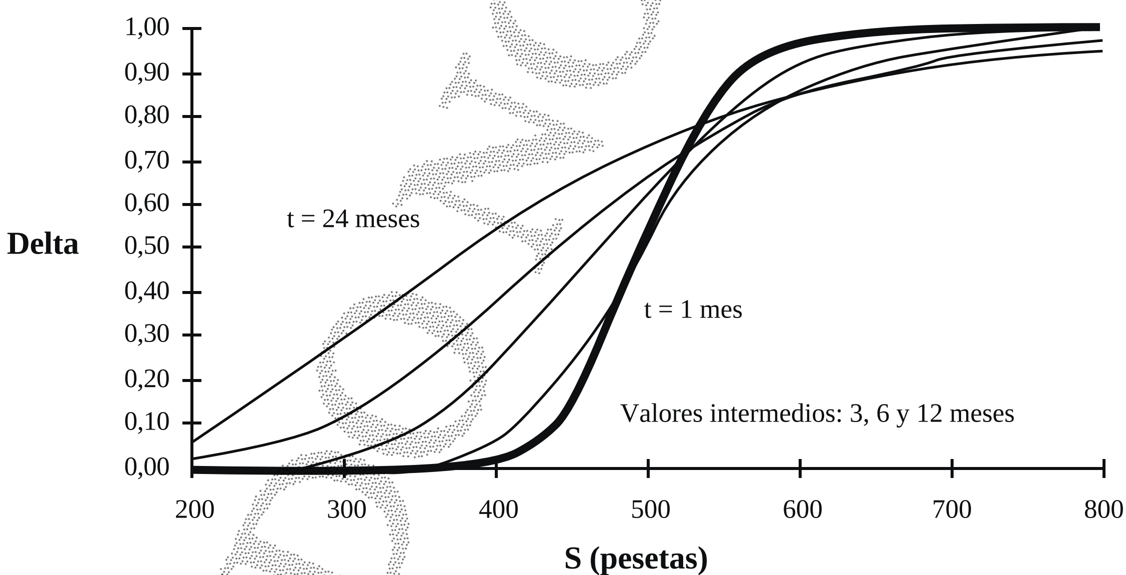
Cartera réplica de una opción de compra
de valor C y parámetros K, t, r, σ y S

Una opción de compra = cartera réplica compuesta por:
Δ acciones y **B** pesetas prestadas (2) a devolver en t,
en todo momento, donde:
$\Delta = \partial C / \partial S = N(x)$, y $B = K r^{-t} N(x - \sigma\sqrt{t})$

Nótese cómo cuando S —> ∞, entonces Δ —> 1 y
—> 0, entonces Δ —> 0.

La Figura 9 muestra el valor de Δ en función del precio de la acción. La Figura nos permite ver cómo –aunque no se modifique el precio de la acción– la Δ de una opción varía con el paso del tiempo.

Figura 9. Delta de una opción de compra según la fórmula de Black y Scholes
r = 1,1; K = 500 pesetas; Volatilidad = 0,3

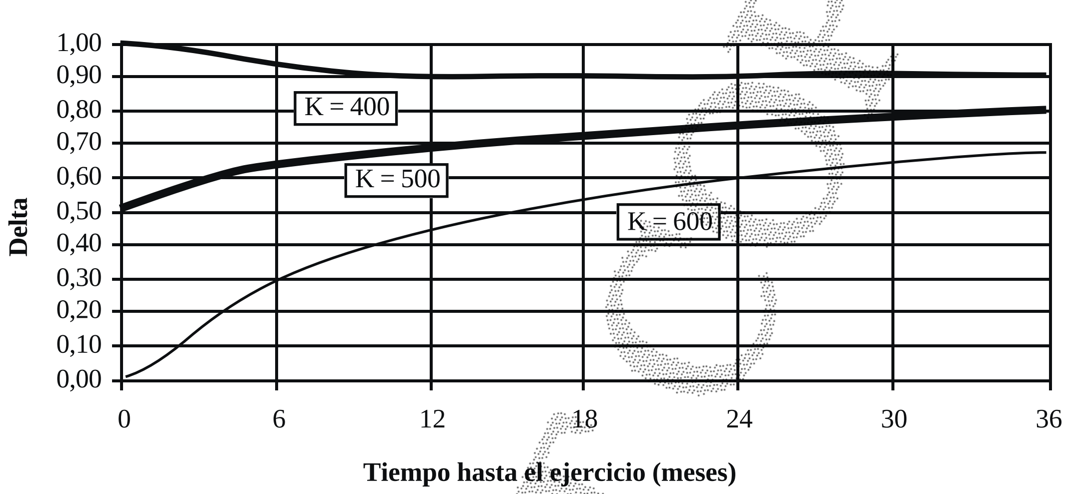


(1) Alternativamente, la cartera réplica puede construirse con bonos y «forwards». Un «forward» es equivalente a comprar una acción con dinero prestado. Por ello, la cartera réplica puede construirse comprando inicialmente algunos bonos y contratos «forward». Posteriormente, basta ir modificando el número de «forwards» para replicar la opción.

(2) Tomar prestadas B pesetas es equivalente a vender a crédito bonos cupón cero (o pagarés) que caducan en t y que tienen un valor nominal de K N $(x - \sigma\sqrt{t})$.

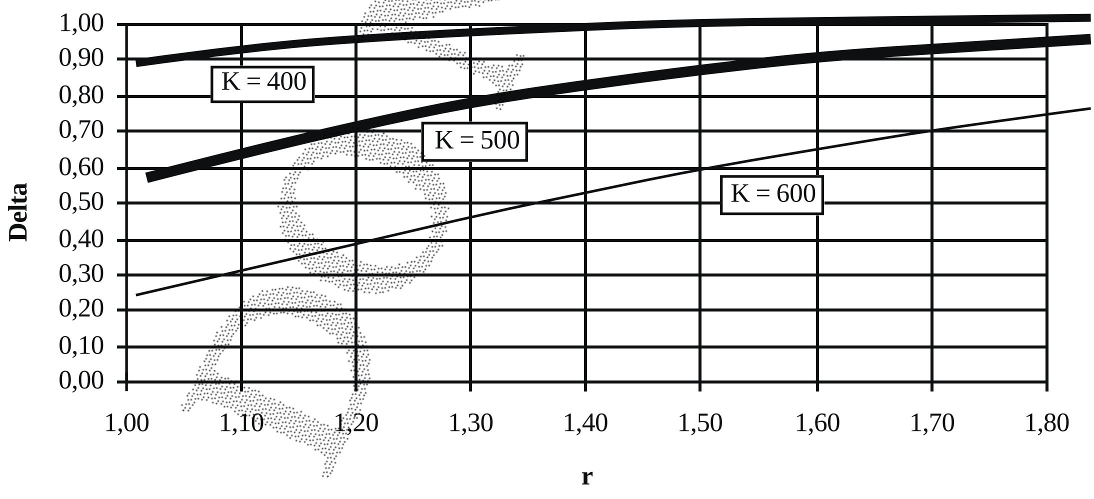
En la Figura 10 se observa la evolución de la Δ según el tiempo que falta hasta el ejercicio de la opción. También se observa que, dado un número determinado de meses hasta el ejercicio, el valor de la Δ es mayor conforme menor es el precio de ejercicio. No obstante, los valores de la Δ según diferentes precios de ejercicio empiezan siendo muy dispares cuando el tiempo hasta el ejercicio es escaso, mientras que acaban convergiendo dentro de un rango cuando el número de meses hasta el ejercicio es elevado.

Figura 10. Delta de una «call» europea según la fórmula de Black y Scholes
S = 500 pesetas; r = 1,1; σ = 30%



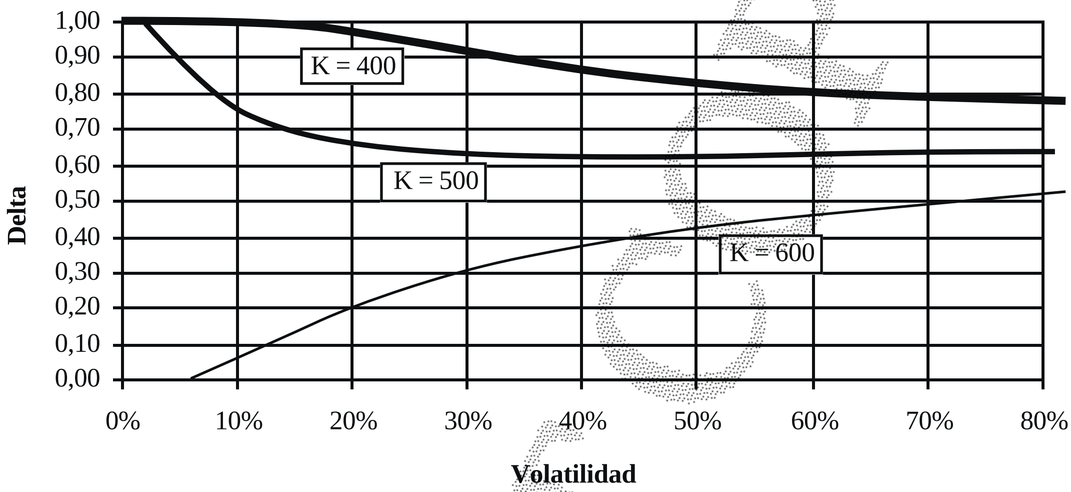
La Figura 11 muestra cómo afecta al valor de la Δ el tipo de interés. Nótese que la influencia del incremento en el tipo de interés en el valor de la Δ es mayor conforme mayor es el precio de ejercicio de la opción.

Figura 11. Delta de una «call» europea según la fórmula de Black y Scholes
S = 500 pesetas; t = 6 meses; σ = 30%



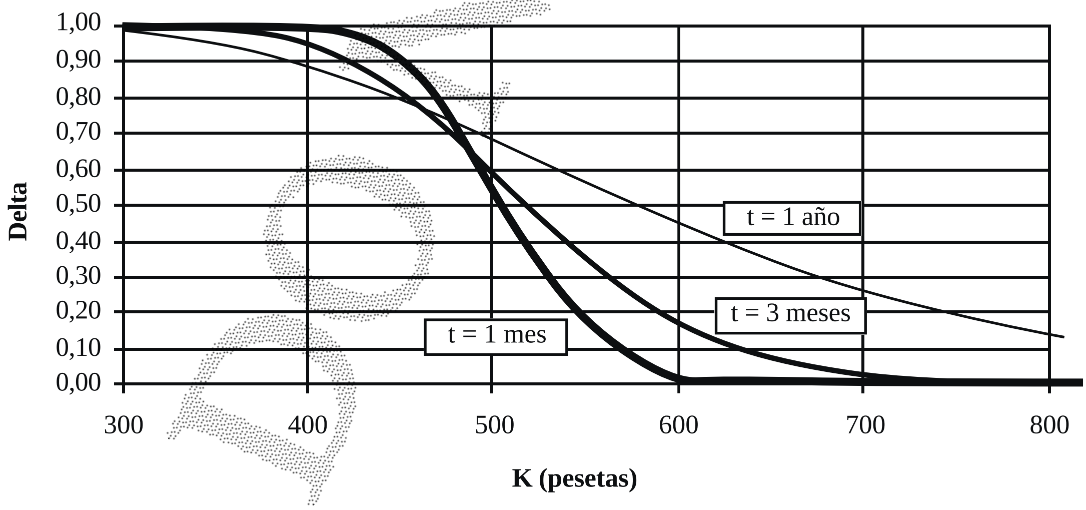
En la Figura 12 se observa la influencia de la volatilidad de las acciones que componen la cartera y del precio de ejercicio de la opción de compra en el valor de la Δ. Mientras que para valores reducidos de volatilidad hay una gran dispersión entre la Δ según sea el precio de ejercicio, a medida que aquellos empiezan a ser elevados se produce una convergencia en los valores de la Δ.

Figura 12. Delta de una «call» europea según la fórmula de Black y Scholes
S = 500 pesetas; t = 6 meses; r = 1,1



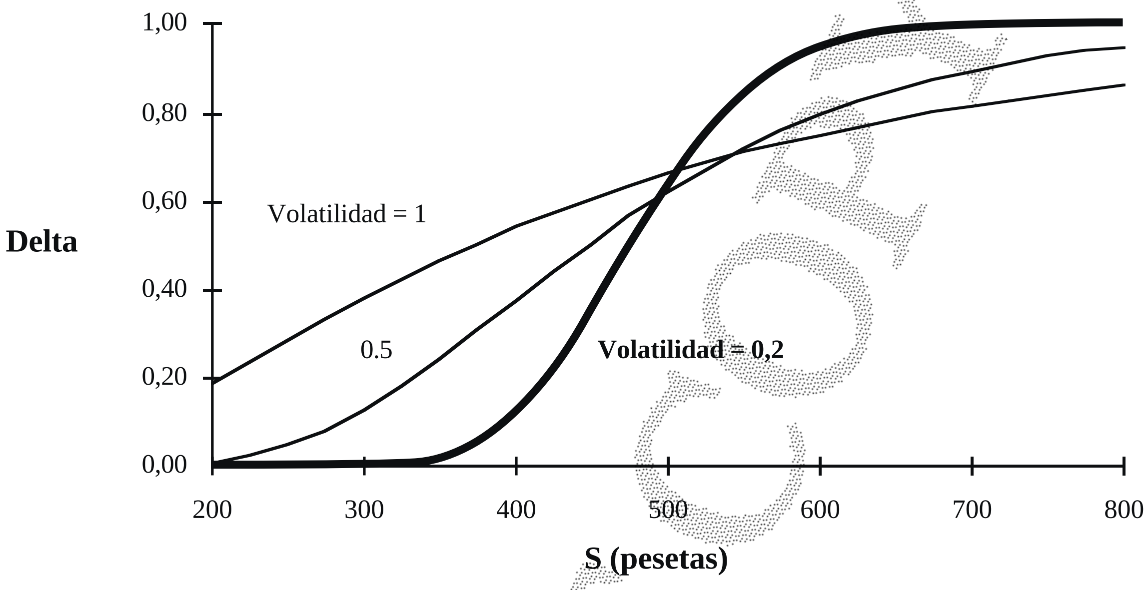
La Figura 13 muestra la evolución del valor de la Δ de una opción de compra según sea el precio de ejercicio de la misma. Nótese que, según se reduce el tiempo que falta hasta el ejercicio, la tendencia se va acentuando.

Figura 13. Delta de una «call» europea según la fórmula de Black y Scholes
S = 500 pesetas; σ = 30%; r = 1,1



La Figura 14 muestra el impacto de la volatilidad en la Δ de una opción.

Figura 14. Delta de una «call» según la fórmula de Black y Scholes
r = 1,1; K = 500 pesetas; t = 6 meses



Se define Gamma (Γ) de una opción como la derivada de delta con respecto al precio de la acción (1). Nótese que gamma indica el número de acciones en que hemos de variar la cartera réplica cuando el precio de la acción varía en una peseta.

$$\Gamma = \partial^2 C / \partial S^2 = \partial \Delta / \partial S = N'(x) / (S\ \sigma \sqrt{t})$$

La elasticidad de una opción (Ω) es el cambio porcentual en el valor de la opción cuando el precio de la acción cambia en 1%, y se calcula:

$$\Omega = [\partial C / \partial S] / [C / S] = [\partial C / C] / [\partial S / S] = \Delta\ S / C = N(x)\ S / C.$$

5. Parámetros necesarios para calcular el precio de una opción

Para utilizar la fórmula de Black y Scholes (o el método binomial) necesitamos conocer cinco parámetros: el precio de la acción, S; el precio de ejercicio, K; el tiempo hasta la fecha de ejercicio, t; el tipo de interés sin riesgo, r, y la volatilidad, σ. Los tres primeros parámetros son directamente observables, y uno más el tipo de interés (r) es también casi directamente observable, pero hemos de hacer la salvedad siguiente: r = 1 + R, siendo R interés anual. Por ejemplo, si el tipo de interés es del 10%, entonces R = 0,1 y r = 1,1.

Un ejemplo. Supongamos que un pagaré del Estado que da derecho a su poseedor a cobrar 100 pesetas dentro de 6 meses (182 días) se puede comprar hoy por 95 pesetas. Si estamos interesados en calcular el precio de una opción que se puede ejercitar el mismo día que vence el pagaré, calcularemos r del siguiente modo:

$$t = 182 / 365 = 0{,}49863;\ r^{-t} = 0{,}95;\ r = 0{,}95^{-1/t} = 0{,}95^{-1/0{,}49863} = 1{,}1083$$

(1) Es también la segunda derivada parcial del precio de la opción con respecto al precio de la acción.

Nos queda únicamente estimar la volatilidad de la acción a la que se refiere la opción. Hay que notar que la volatilidad relevante –que es la que hemos incluido en la fórmula de Black y Scholes– es la volatilidad entre momento actual y el día en que expira la opción. Sin embargo, en muchas ocasiones se utiliza la volatilidad histórica como una estimación de la futura volatilidad. Esto será apropiado cuando no se prevea en el futuro ninguna alteración sustancial que haga pensar que el período que tenemos por delante sea distinto (en términos de volatilidad) que el período histórico sobre el que estamos midiendo la volatilidad.

Para medir la volatilidad histórica hemos de precisar sobre qué período la hemos de medir. La regla más común es tomar un período histórico de duración igual al período de vigencia de la opción. Veamos cómo se calcula la volatilidad con un ejemplo.

Supongamos que estamos interesados en calcular el precio de una opción con 20 semanas hasta la fecha de ejercicio. Por tanto, estimaremos la volatilidad de la acción en las 20 semanas anteriores. En la Tabla 6 hacemos el ejercicio con precios semanales, pero se podría hacer exactamente igual con precios diarios. La columna (1) de la Tabla 6 es el precio de la acción. Hay que tener en cuenta que si la acción pagó algún dividendo a lo largo de estas 20 semanas, éste se ha de sumar a la cotización. Del mismo modo, habría que ajustar la cotización si hubiese habido una ampliación de capital.

Tabla 6. Cálculo de la volatilidad de una acción

Semana	**S_t (1)**	**$D_t = S_t/S_{t-1}$ (2)**	**$R_t = Ln(D_t)$ (3)**	**$R_t - \mu$ (4)**	**$(R_t - \mu)^2$ (5)**
0	650				
1	625	0,961538	–0,039221	–0,048784	0,0023798
2	630	1,008000	0,007968	–0,001595	0,0000025
3	644	1,022222	0,021979	0,012416	0,0001542
4	692	1,074534	0,071887	0,062324	0,0038843
5	681	0,984104	–0,016024	–0,025586	0,0006547
6	654	0,960352	–0,040455	–0,050018	0,0025018
7	680	1,039755	0,038985	0,029423	0,0008657
8	635	0,933824	–0,068468	–0,078031	0,0060888
9	690	1,086614	0,083067	0,073504	0,0054028
10	719	1,042029	0,041170	0,031607	0,0009990
11	720	1,001391	0,001390	–0,008173	0,0000668
12	720	1,000000	0,000000	–0,009563	0,0000914
13	730	1,013889	0,013793	0,004231	0,0000179
14	769	1,053425	0,052046	0,042484	0,0018049
15	714	0,928479	–0,074208	–0,083771	0,0070175
16	742	1,039216	0,038466	0,028903	0,0008354
17	735	0,990566	–0,009479	–0,019042	0,0003626
18	751	1,021769	0,021535	0,011972	0,0001433
19	790	1,051931	0,050627	0,041064	0,0016863
20	787	0,996203	–0,003805	–0,013367	0,0001787
Suma		20,209840	0,191256		0,0351384
Media	702,7619	1,010492	0,009563		

Desviación estándar semanal = 0,043005 (Varianza semanal = 0,001849)
Varianza anual = 0,096168
Desviación estandar anual = **0,310110 = Volatilidad anual = 31,011%**

La columna (2) es el precio de la acción de la semana dividido por el precio de la semana anterior. La columna (3) es el logaritmo neperiano de la columna (2), esto es, el rendimiento semanal de la acción.

La volatilidad anual es precisamente la desviación estándar del rendimiento de la acción en un año. La varianza es el cuadrado de la desviación estándar. La estimación sin sesgo de la varianza semanal de R_t viene dada por la expresión (1):

$$\sum (R_t - \mu)^2 / 19 = 0{,}001849$$

donde μ es la media de R_t, esto es: $\sum (R_t) / 20 = 0{,}009563$, con lo cual la estimación de la varianza anual es: 52 x 0,001849 = 0,096168. La volatilidad anual es la raíz cuadrada de esta cantidad, esto es: 0,310110.

6. Razones por las que el modelo es muy exacto

Llegado a este punto, es probable que el lector esté pensando que la derivación del modelo es un interesante ejercicio matemático, pero que las hipótesis en que se basa son muy poco realistas. Una de las hipótesis era que no existían comisiones ni impuestos diferenciales. Esta puede ser una hipótesis no muy plausible para un pequeño inversor particular, pero ciertamente lo es para los grandes inversores, que son los que al final fijan las cotizaciones, pues son los que pueden aprovechar el arbitraje en bandas más estrechas. La segunda hipótesis asumía que se puede tomar prestado e invertir dinero a la tasa de interés sin riesgo. Esta no es una hipótesis que se aleje de la realidad para los mayores inversores. La tercera hipótesis es que la tasa de interés r es conocida y constante durante la vida de la opción. Aunque sabemos que la tasa de interés varía, el permitir que la tasa de interés sea aleatoria introduce una pequeña y despreciable variación.

Las hipótesis de mercado continuo y del movimiento supuesto para el precio de la acción vienen determinadas por la distribución logarítmico normal que hemos supuesto para el precio de la acción. Hay tres factores que hacen que el precio de la acción evolucione de modo ligeramente distinto que en la distribución logarítmico normal:

1. La volatilidad no es constante, sino que es inversamente proporcional al precio de la acción.

2. Se producen cambios aleatorios en la volatilidad.

3. De todos es sabido que el precio de las acciones se mueve en ocasiones a saltos.

Afortunadamente, estos tres efectos tienden a amortiguarse mutuamente, con lo que el efecto conjunto de los tres es despreciable. El efecto 1 causa infravaloración para aquellas opciones en las que el precio de la acción es sensiblemente menor que el precio de ejercicio de la opción, y sobrevaloración para aquellas opciones en las que el precio de ejercicio es sensiblemente menor al precio de la acción. Los factores 2 y 3 producen sobrevaloración para opciones con precio de ejercicio superior al valor de la acción e infravaloración (normalmente) para aquellas opciones cuyo precio de ejercicio es menor que el precio de la acción.

---

(1) Aunque el estimador de máxima verosimilitud de la varianza es $\sum (R_t - \mu)^2 / n$, este estimador resulta sesgado.

En general, el modelo de Black y Scholes es un modelo muy útil y muy exacto. Para el caso en que la acción a la que se refiere la opción pague dividendos durante la vida de la opción, hay dos procedimientos para ajustar el valor. El procedimiento menos exacto es seguir utilizando la fórmula de Black y Scholes y ajustar el parámetro S: en lugar de introducir el precio de la acción, introduciremos el precio de la acción menos el valor actual neto de los dividendos que esperamos que pague la acción durante el período de vigencia de la opción.

Hay otro método que es exacto y que consiste en el empleo del método binomial. De cualquier modo, las divergencias entre estos dos métodos son –cuando el tiempo hasta el ejercicio no es muy grande– muy pequeñas.

7. Ejercicio anticipado de la opción

La fórmula de Black y Scholes supone que la opción nunca se ejercerá antes de la fecha de ejercicio. En caso de ser una opción europea, esto viene obligado por las características del contrato. En caso de ser una opción americana sobre una acción que no reparte dividendos, ya hemos visto que la fecha óptima de ejercicio de la «call» es la fecha de ejercicio: en cualquier momento anterior al mismo, es preferible vender la opción en el mercado secundario a ejercitarla.

El ejercicio anticipado de la «call» puede ser racional, únicamente, en el caso en que la acción reparta dividendos. En este caso, puede ser óptimo ejercitar la «call» el día inmediatamente anterior al reparto del dividendo.

De nuevo podemos utilizar dos métodos para estudiar la posibilidad del ejercicio anticipado. El primero consiste en evaluar la opción según la fórmula de Black y Scholes con el tiempo comprendido entre hoy y la fecha en que la acción vaya a repartir el dividendo, sin hacer ningún ajuste en S, y valorar la opción entre hoy y la fecha de ejercicio haciendo el ajuste indicado de dividendos en S, esto es, restando a S el valor actual neto de los dividendos esperados durante el período de vigencia de la opción. Si el primer valor resulta superior al segundo, entonces puede ser óptimo el ejercicio anticipado.

El segundo procedimiento –más exacto– es utilizar la fórmula binomial. De nuevo –y salvo que la opción tenga una larga duración (superior a un año) o que los dividendos sean muy elevados– las dos fórmulas producen resultados muy similares.

8. Comprobación empírica de la fórmula de Black y Scholes. Fórmulas alternativas

Desde que Black y Scholes dieron a conocer su popular fórmula, numerosos estudiosos han publicado investigaciones tratando de comprobar si los precios de mercado se ajustan a la fórmula. El primer estudio fue publicado por Galai, en 1977; posteriormente, Trippi, Manaster y muchos otros publicaron estudios tratando de comprobar la posibilidad de conseguir beneficios extraordinarios utilizando estrategias de compra y venta de opciones utilizando la fórmula de Black y Scholes. Todos estos estudios originales tuvieron algunos errores técnicos que fueron resueltos por Rubistein en 1981. La conclusión general es que el modelo de Black y Scholes nos proporciona una herramienta extremadamente valiosa y precisa para calcular los precios de las opciones, y que ninguno de los otros modelos desarrollados con posterioridad para valorar las opciones lo mejora sustancialmente.

Se han desarrollado muchas fórmulas alternativas a la de Black y Scholes para valorar opciones. La mayoría de ellas surgen de considerar que el precio del activo subyacente no evoluciona como supone la fórmula de Black y Scholes (1), sino de otro modo.

Cox y Ross (1976) derivaron fórmulas alternativas según que el movimiento del subyacente siguiera un proceso de difusión, un proceso de saltos o un proceso con elasticidad de la varianza constante (2). Merton (1976) propuso un proceso de saltos con difusión. Merton (1973) fue el primero en desarrollar fórmulas suponiendo los tipos de interés aleatorios. Hull y White (1987), Johnson y Shanno (1987), Scott (1977) y Wiggins (1987) publicaron fórmulas de valoración con volatilidad del subyacente aleatoria. En las revistas especializadas siguen apareciendo fórmulas de valoración para distintas hipótesis sobre el movimiento del subyacente.

Como es evidente que la volatilidad del subyacente no es constante, muchos investigadores dedicaron sus esfuerzos a desarrollar métodos de valoración (la mayoría numéricos) de opciones con volatilidad aleatoria. De aquí surgen los métodos denominados ARCH («autoregressive conditional heteroskedasticity») y GARCH («generalized autoregressive conditional heteroskedasticity») (3). Se han realizado muchos test para ver si estos modelos valoran mejor las opciones que la fórmula de Black y Scholes, casi siempre comparando los resultados con los precios de mercado, pero los resultados no son concluyentes y todavía la fórmula de Black y Scholes (o el método binomial o la simulación con volatilidad constante) sigue siendo la más utilizada. En lo que respecta a opciones sobre divisas, Melino y Turnbull (1995) ofrecen un trabajo muy interesante que compara la fórmula de Black y Scholes (utilizando la volatilidad histórica o la volatilidad implícita) con otra fórmula con volatilidad aleatoria. Lo interesante del artículo radica (más que en las conclusiones a que llegan) en que realizan la comparación de las dos fórmulas en base al ajuste de las carteras réplicas asociadas a ambas fórmulas (4).

9. Opción de venta («put»)

Podemos obtener el valor y las propiedades de una opción de venta europea a partir de los de la opción de compra análoga y haciendo uso de la «put-call parity»:

$$C = S + P - K\, r^{-t}$$

La fórmula de Black y Scholes para valorar opciones de venta europeas viene dada por:

$$\mathbf{P = K\, r^{-t}\, N\, (w + \sigma \sqrt{t}) - S\, N\, (w)}$$

$$\text{siendo } w = \frac{\mathrm{Ln}\,(K\, r^{-t} / S)}{\sigma \sqrt{t}} - \sigma \sqrt{t} / 2 = -x$$

(1) Volatilidad constante, tipo de interés constante, sin saltos.

(2) Cox y Rubinstein (1985), en las páginas 360-370, exponen con claridad estas fórmulas.

(3) Véase artículos de Engle y Mustafa (1992), y Kang y Brorsen (1995).

(4) Una buena recopilación de la literatura financiera sobre este tema se encuentra en Bates, David S., «Testing Option Pricing Models», Wharton, 1995.

Es importante recordar que debido a la posibilidad de ejercicio óptimo anticipado, el valor de una «put» americana es siempre superior al de una «put» europea con idénticas características. Para $S = 0$, $w = \infty$, y la «put» europea vale $P = K\,r^{-t}$. La «put» americana vale K.

Las Tablas 7, 8, 9, 10 y 11 muestran cómo cambia el valor de una opción de venta europea cuando cambian los parámetros que la caracterizan. Estas Tablas, y las Figuras 15 a 22, permiten comprobar cómo los parámetros afectan el valor de una «put».

Podemos escribir más precisamente la sensibilidad del valor de una «put» europea al cambio en el valor de sus parámetros.

La Figura 15 muestra cómo el valor de una «put» puede aumentar o disminuir cuando aumenta el tiempo hasta la fecha de ejercicio: $\partial P / \partial t = \partial C / \partial t - K\,r^{-t}\,\mathrm{Ln}\,(r) > = < 0$.

En las Figuras 16 y 17 se observa la evolución del valor de la opción de venta cuando varía el precio de ejercicio y el tiempo que falta hasta el mismo. Se puede apreciar cómo el valor de la «put» aumenta cuando lo hace el precio de ejercicio.

La Figura 18 muestra cómo el valor de una «put» aumenta cuando aumenta el precio de ejercicio: $\partial P / \partial K = \partial C / \partial K + r^{-t} = r^{-t}\,[1 - N\,(x - \sigma\,\sqrt{t})] > 0$.

La Figura 19 muestra cómo el valor de una «put» aumenta cuando aumenta la volatilidad de la acción a que se refiere: $\partial P / \partial\sigma = \partial C / \partial\sigma = S\,\sqrt{t}\,N'\,(x) > 0$.

En la Figura 20 se observa la relación entre el valor de la «put» y la volatilidad: la «put» vale más conforme mayor es la volatilidad de la acción subyacente.

La Figura 21 muestra cómo el valor de una «put» disminuye cuando aumenta el tipo de interés: $\partial P / \partial r = [\partial C / \partial r] - t\,K\,r^{-(t+1)} = t\,K\,r^{-(t+1)}\,[N\,(x - \sigma\,\sqrt{t}) - 1] < 0$.

En la Figura 22 se puede apreciar que el valor de la «put» disminuye a medida que aumenta el tipo de interés. Además, esa disminución es más acusada cuanto mayor es el precio de ejercicio de la opción.

Las Figuras 15, 18, 19 y 21 permiten comprobar cómo el valor de una «put» disminuye cuando aumenta el precio de la acción a que se refiere:

$$\partial P / \partial S = [\partial C / \partial S] - 1 = N\,(x) - 1 < 0$$
$$\Gamma = \partial^2 P / \partial S^2 = \partial^2 C / \partial S^2 = \partial\Delta / \partial S = N'\,(x) / (S\,\sigma\,\sqrt{t})$$
$$\Omega = [\partial P / \partial S] / [P / S] = [\partial P / P] / [\partial S / S] = \Delta S / P = [N\,(x) - 1]\,S / C$$

Podemos construir la cartera réplica de una opción de venta europea análogamente a como hicimos para una «call»:

Cartera réplica de una opción de venta («put») europea
de valor P y parámetros K, t, r y S

Una opción de venta = cartera réplica compuesta por:

Δ acciones vendidas a crédito («short») y **B** pesetas invertidas (1) *en todo momento* y a devolver en t, donde:

$\Delta = \partial P / \partial S = N\,(w) = 1 - N\,(x)$ y **B** $= K\,r^{-t}\,N\,(w - \sigma\,\sqrt{t})$.

---

(1) Invertir B pesetas es equivalente a comprar bonos cupón cero (o pagarés) que vencen en t y que tienen un valor nominal de $K\,N\,(w - \sigma\,\sqrt{t})$.

Tabla 7. Valores de distintas «puts» europeas
(El valor de la opción se calcula utilizando la fórmula de Black y Scholes)

	r				
K	**1,03**	**1,05**	**1,10**	**1,15**	**1,20**
300	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
400	1,80	1,66	1,38	1,14	0,95
500	27,98	26,78	24,03	21,59	19,42
600	100,49	97,95	91,93	86,34	81,15
700	195,28	191,99	184,11	176,68	169,67

S = 500 pesetas; t = 0,25 años; σ = 0,3

Tabla 8. Valores de distintas «puts» europeas
(El valor de la opción se calcula utilizando la fórmula de Black y Scholes)

	r				
K	**1,03**	**1,05**	**1,10**	**1,15**	**1,20**
300	0,17	0,15	0,11	0,07	0,05
400	6,17	5,60	4,41	3,49	2,76
500	38,36	35,98	30,65	26,12	22,27
600	105,27	100,69	90,10	80,61	72,12
700	193,23	186,99	172,29	158,78	146,33

S = 500 pesetas; **t = 0,5 años**; σ = 0,3

Tabla 9. Valores de distintas «puts» europeas
(El valor de la opción se calcula utilizando la fórmula de Black y Scholes)

	r				
K	**1,03**	**1,05**	**1,10**	**1,15**	**1,20**
300	0,67	0,63	0,55	0,48	0,43
400	10,69	10,29	9,37	8,56	7,84
500	47,74	46,46	43,49	40,77	38,29
600	115,00	112,73	107,37	102,39	97,75
700	201,29	198,21	190,86	183,97	177,50

S = 500 pesetas; t = 0,25 años; **σ = 0,5**

Tabla 10. Valores de distintas «puts» europeas
(El valor de la opción se calcula utilizando la fórmula de Black y Scholes)

	r				
K	**1,03**	**1,05**	**1,10**	**1,15**	**1,20**
300	0,48	0,44	0,35	0,29	0,23
400	22,38	21,42	19,22	17,27	15,54
500	98,57	96,34	91,06	86,13	81,52
600	195,67	192,83	186,00	179,56	173,46
700	294,85	291,52	283,52	275,97	268,82

S = 400 pesetas; t = 0,25 años; σ = 0,3

Tabla 11. Valores de distintas «puts» europeas
(El valor de la opción se calcula utilizando la fórmula de Black y Scholes)
r = 1,1; K = 500 pesetas; σ = 0,3

	t				
S (pesetas)	**1 mes**	**3 meses**	**6 meses**	**12 meses**	**24 meses**
	0,0833 años	*0,25 años*	*0,50 años*	*1,00 año*	*2,00 años*
200	296,04	288,23	276,73	254,63	215,36
250	246,04	238,23	226,76	205,41	171,00
300	196,04	188,24	177,14	158,71	132,41
350	146,04	138,51	129,52	117,12	100,48
400	96,13	91,06	87,31	82,73	75,12
450	48,72	51,19	53,94	56,23	55,56
500	15,30	24,03	30,65	37,00	40,79
550	2,58	9,42	16,17	23,73	29,82
600	0,23	3,14	8,00	14,91	21,74
650	0,01	0,91	3,76	9,22	15,84
700	0,00	0,24	1,70	5,64	11,55

Figura 15. Valor de una «put» europea según la fórmula de Black y Scholes
r = 1,1; K = 500 pesetas; Volatilidad = 0,3

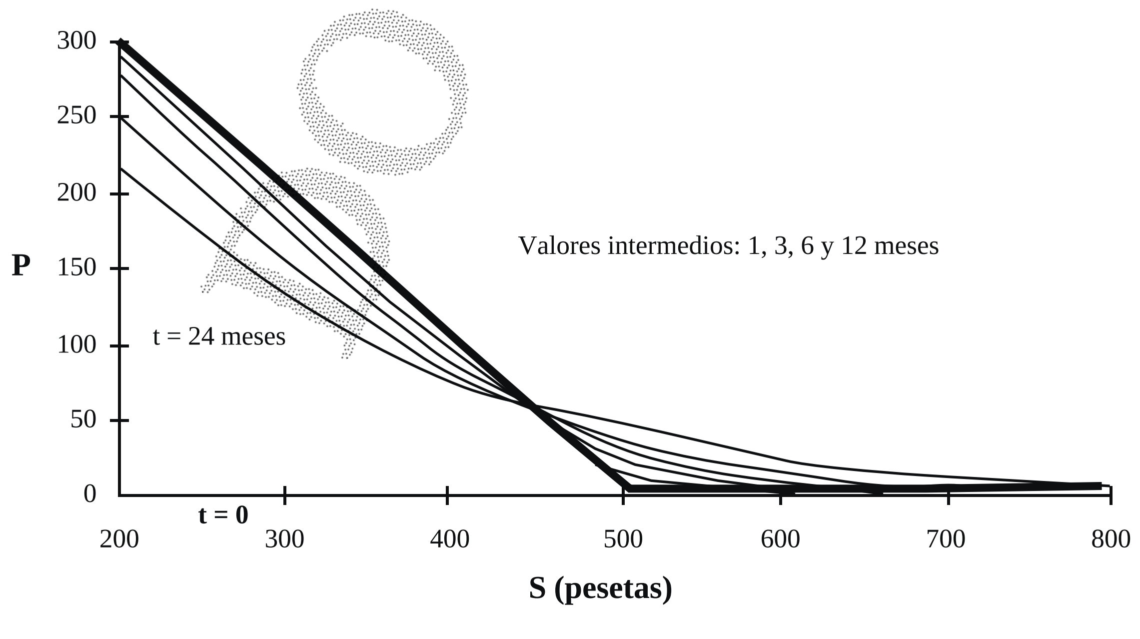


Figura 16. Valor de una «put» europea según la fórmula de Black y Scholes
S = 500 pesetas; r = 1,1; Volatilidad = 30%

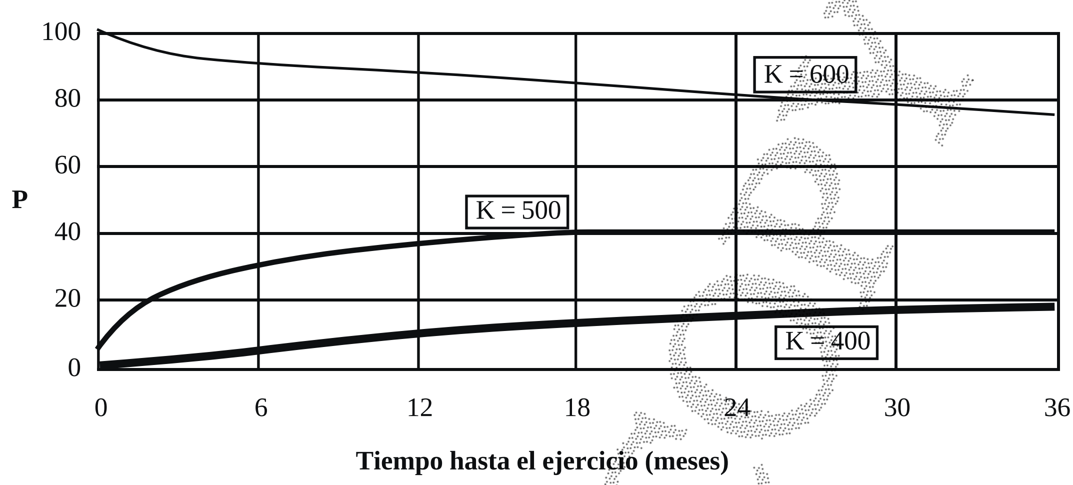


Figura 17. Valor de una «put» europea según la fórmula de Black y Scholes
S = 500 pesetas; σ = 30%; r = 1,1

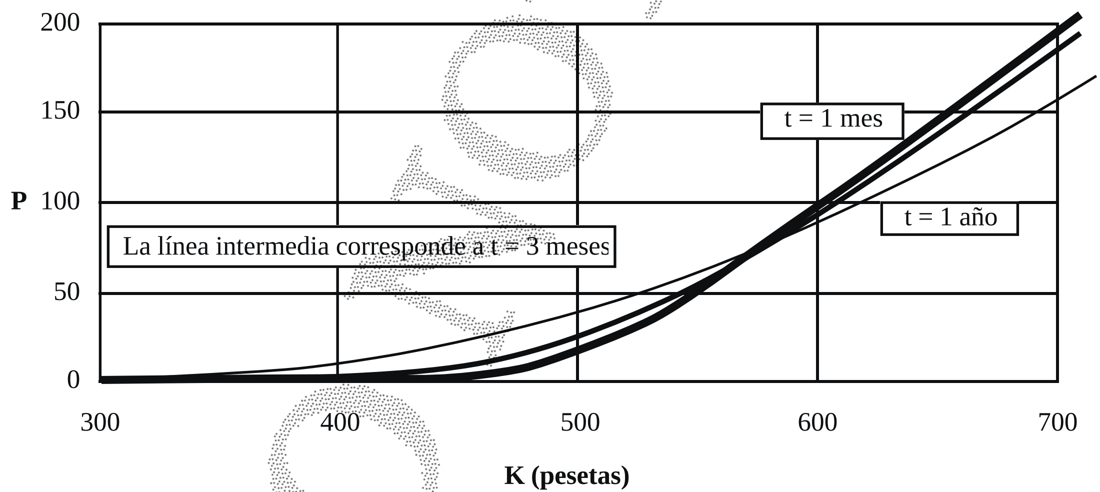


Figura 18. Valor de una «put» europea según la fórmula de Black y Scholes
r = 1,1; t = 6 meses; Volatilidad = 0,3

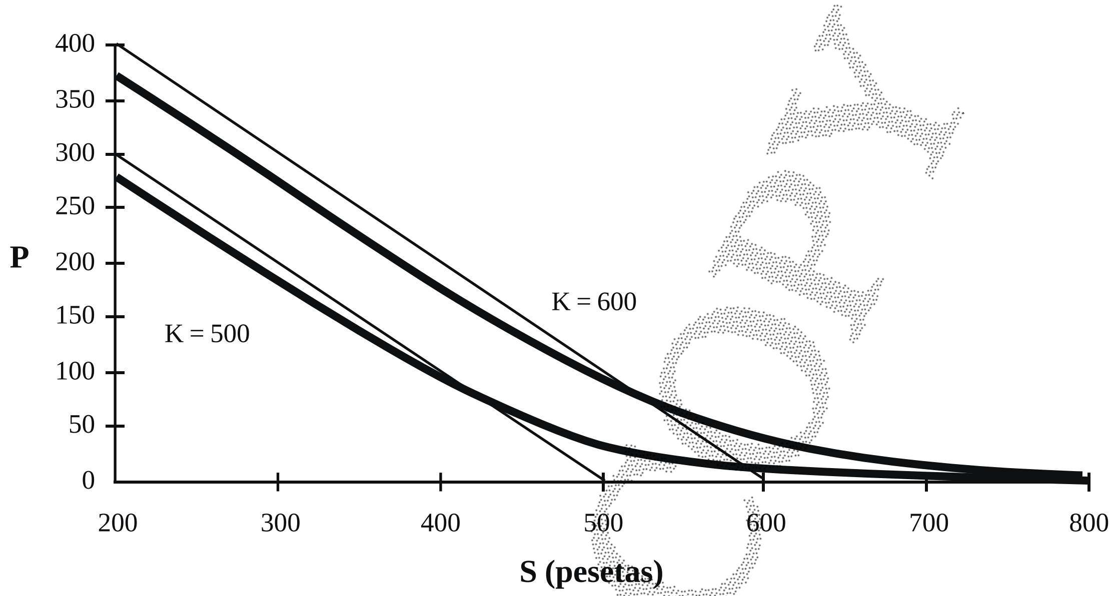


Figura 19. Valor de una «put» europea según la fórmula de Black y Scholes
r = 1,1; K = 500 pesetas; t = 6 meses

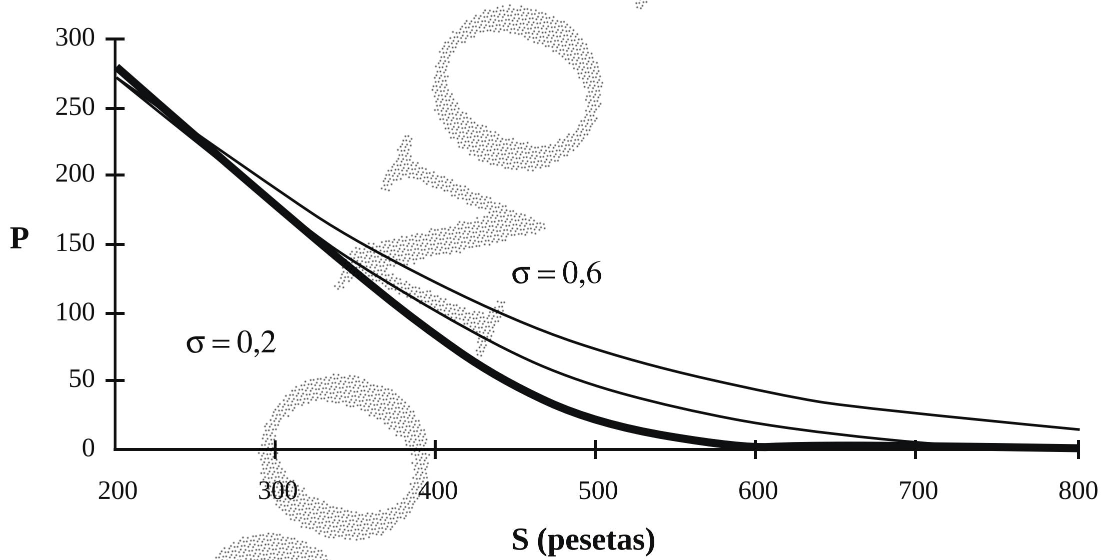


Figura 20. Valor de una «put» europea según la fórmula de Black y Scholes
S = 500 pesetas; r = 1,1; t = 6 meses

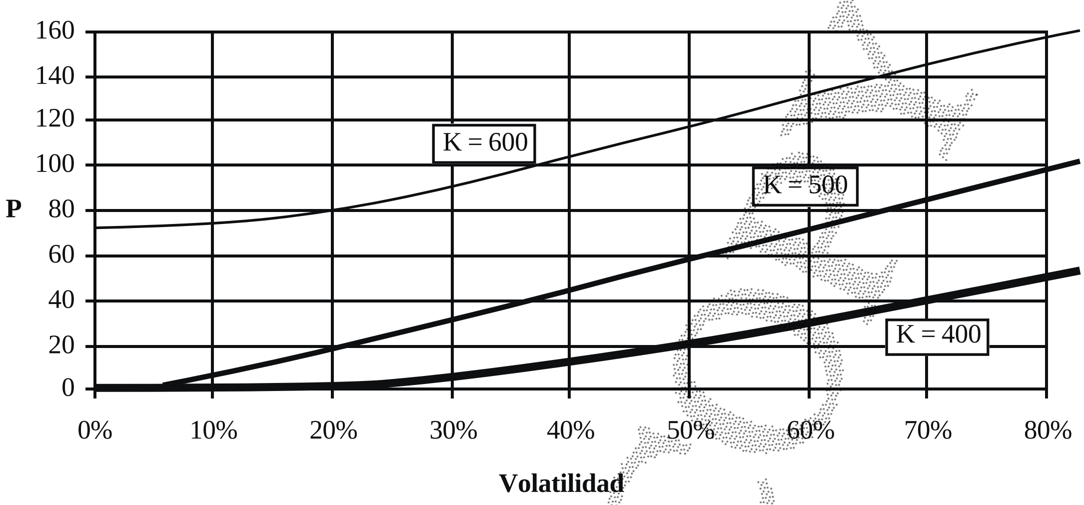


Figura 21. Valor de una opción de venta según la fórmula de Black y Scholes
t = 6 meses;   K = 500 pesetas;   Volatilidad = 0,3

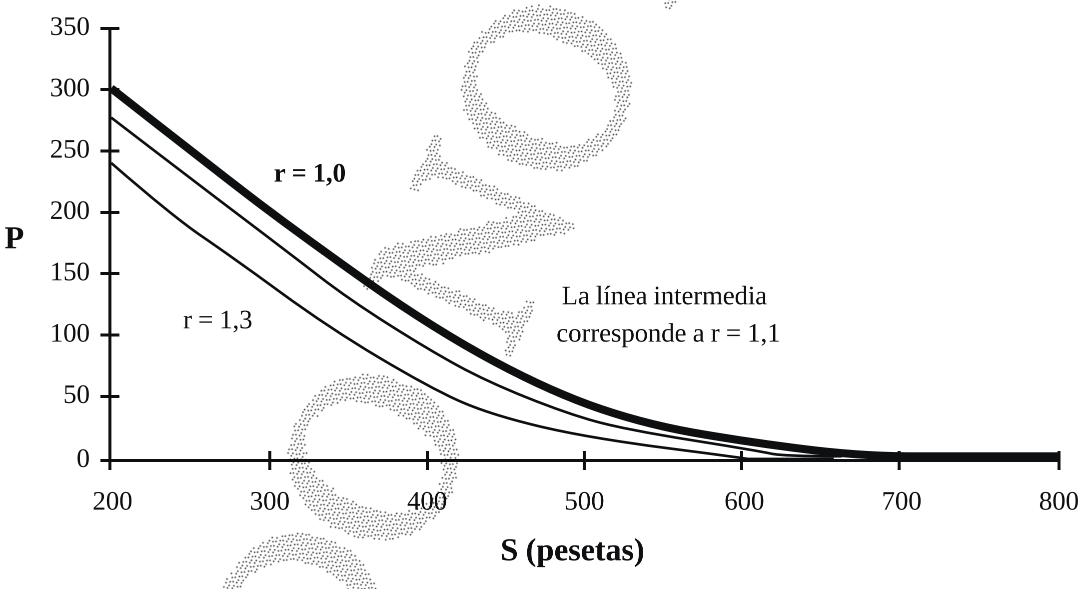
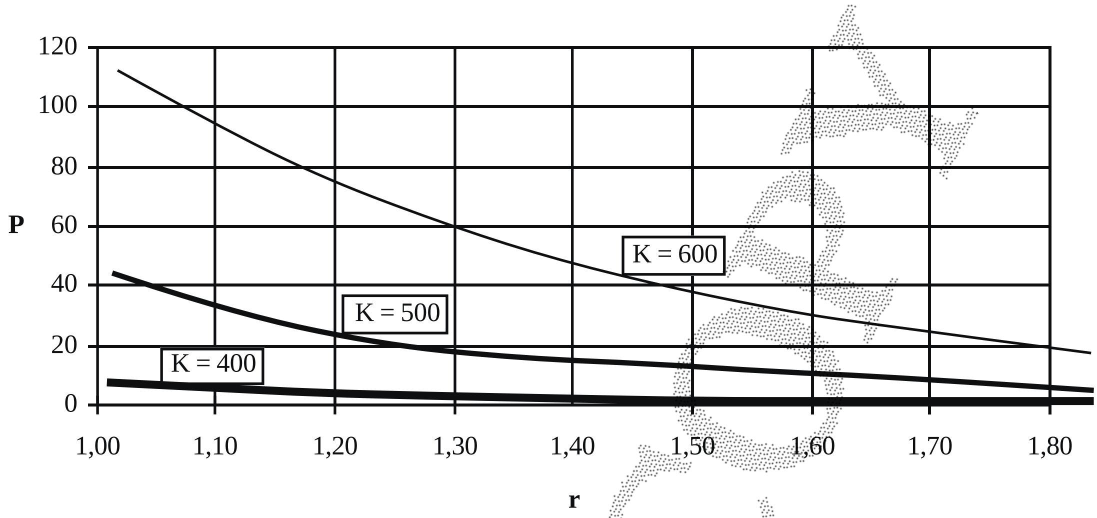


Figura 22. Valor de una «put» europea según la fórmula de Black y Scholes
S = 500 pesetas; t = 6 meses; σ = 30%



10. La distribución normal

La Figura 23 es la representación de la distribución de probabilidad normal estándar (de media cero y varianza unidad), que viene dada por:

$$N'(x) = (2\pi)^{-1/2}\, e^{-x^2/2}$$

La Figura 24 es la representación de N(x). Recordemos que N (x) es el área comprendida debajo de la distribución de probabilidad normal estándar de la Figura 23 (de media cero y varianza unidad) entre $-\infty$ y x. N(x) se denomina función de probabilidad acumulada de una distribución normal estándar.

La Figura 24 permite apreciar que N (– x) = 1 – N (x). La Figura 25 es la representación de la distribución logarítmico normal. Se obtiene directamente de la Figura 23. La rentabilidad de las acciones se asemeja a la distribución normal, mientras que el precio de las acciones se asemeja a la distribución logarítmico normal.

Figura 23. N' (x)

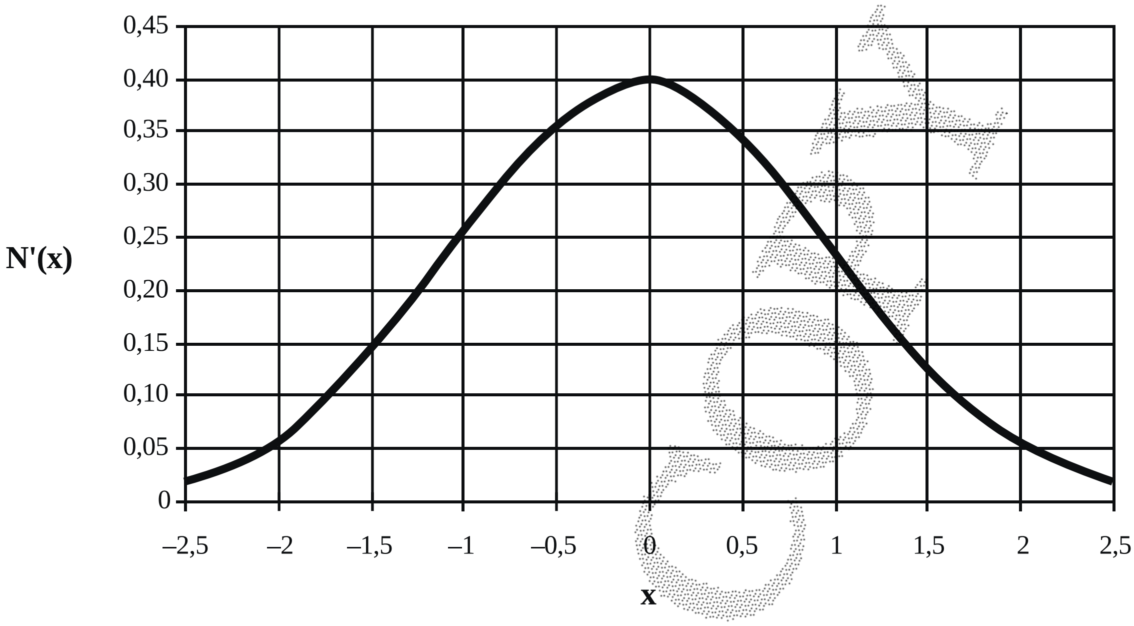


Figura 24. N(x)

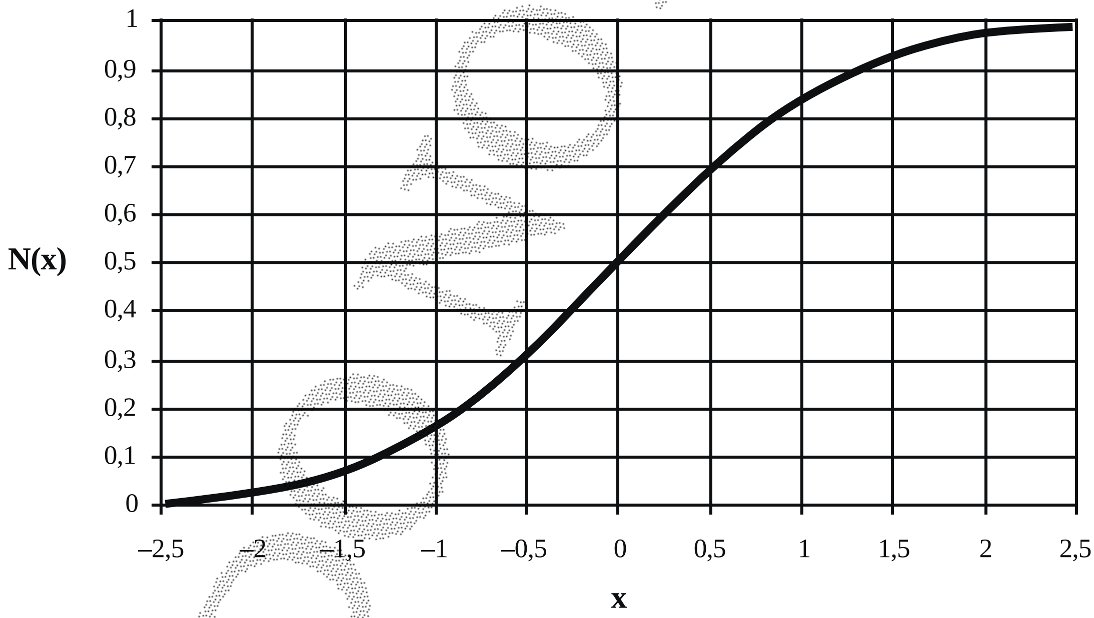
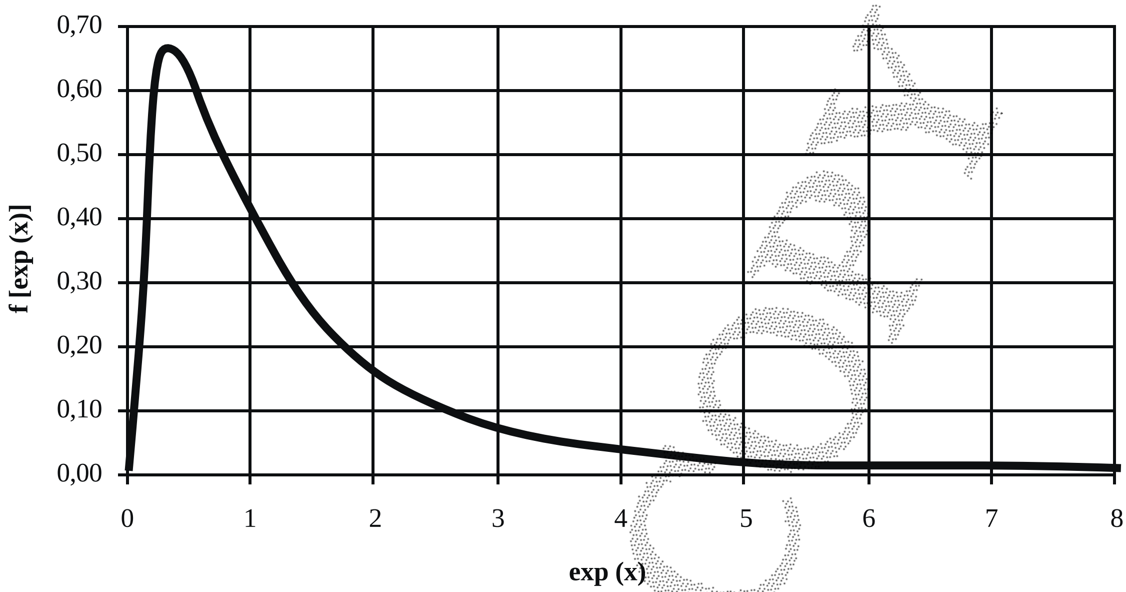


Figura 25. Distribución logarítmico normal



12. Valoración de opciones sobre acciones que reparten dividendos

Para valorar opciones *europeas* sobre acciones que reparten dividendos es necesario realizar un ajuste en la fórmula de Black y Scholes: se introduce S – D (el precio de la acción menos el valor actual de los dividendos), en lugar del precio de la acción.

Ejemplo. Vimos en el ejemplo de la sección 2 que el valor de una «call» europea sobre una acción que no reparte dividendos con las siguientes características:

S = 500; K = 400; σ = 0,3; r = 1,1 y t = 0,25, es 110,80 pesetas. Si la acción repartiese un dividendo de 10 pesetas dentro de dos meses, el valor de la «call» europea sería 101,44 pesetas. Este valor se obtiene introduciendo en la fórmula S – D (490,158 = 500 – 10/ $1{,}1^{2/12}$), en lugar de 500.

Análogamente, el valor de la «put» europea sobre la acción, si no reparte dividendos, es 1,38 pesetas. Notar que se cumple la «put-call parity» (12.1): 110,80 = 500 + 1,38 – 400 x $1{,}1^{-3/12}$.

El valor de la «put» europea sobre la acción, si existe un dividendo de 10 pesetas dentro de 2 meses, sería 1,86 pesetas (1). Notar que se cumple la «put-call parity» (10.4): 101,44 = 500 – 10/ $1{,}1^{2/12}$ + 1,86 – 400 x $1{,}1^{-3/12}$.

(1) Esta valoración es aproximada. Si el dividendo es pequeño en relación al precio de la acción, la aproximación es muy buena. El valor exacto de opciones sobre acciones que reparten dividendos se obtiene con el método binomial.

Merton desarrolló una fórmula para valorar opciones europeas en que los dividendos se suponen continuos y dependientes del precio de la acción. Si los dividendos anuales de la acción son el d% de su cotización y los paga de modo continuo, el valor de la «call» viene dado por:

Fórmula para valorar opciones con dividendos continuos

$$\mathbf{C = S\ (1 + d)^{-t}\ N\ (x) - K\ r^{-t}\ N\ (x - \sigma \sqrt{t})}$$
$$\mathbf{P = K\ r^{-t}\ N\ (-x + \sigma \sqrt{t}) - S\ (1 + d)^{-t}\ N\ (-x)} \qquad (3)$$
$$\text{siendo } x = \mathrm{Ln}\ (S\ (1 + d)^{-t} / K\ r^{-t}) / (\sigma \sqrt{t}) + \sigma \sqrt{t} / 2$$

Nótese que $S\ (1+d)^{-t}$ no es más que el precio actual de la acción menos el valor actual de los dividendos.

Ejemplo. Si una acción que hoy tiene un precio de 500 pesetas reparte continuamente un dividendo anual del 8% (d = 0,08), el valor actual de tener una acción dentro de un año es 500/1,08 = 462,96296 pesetas. Expresando el dividendo como interés continuo, esto significa que estamos suponiendo que la acción reparte en cada instante un dividendo anual equivalente al 7,696104% de su cotización (0,07696104 = ln[1,08]). Véase que esto es equivalente a suponer que la acción pagará a lo largo del año un único dividendo igual al 7,407407% (1 – 1/1,08) de su cotización.

Si el dividendo no es continuo y constante a lo largo de la vida de la opción, (3) es correcta siempre que d sea el dividendo promedio.

Cuando las opciones de compra son *americanas*, el valor correcto se obtiene únicamente utilizando el método binomial. Sin embargo, existen algunas aproximaciones:

1) Valorar la opción como si fuese europea siguiendo el procedimiento descrito.

2) Calcular el valor de varias opciones europeas: una con fecha de ejercicio en el final de la vida de la opción, y otras con fecha de ejercicio en cada fecha en que la acción reparta dividendos (1). El valor de la opción será el mayor de todos estos valores.

3) Utilizar otras fórmulas más sofisticadas y exactas, como la de Whaley, Roll y Geske (2). El propio Whaley realizó una comprobación de los tres métodos y encontró que el tercero (error = 1,1%) es un poco más exacto que el segundo (error = 1,5%), y éste, a su vez, más exacto que el primero (error = 2,1%).

En resumen, podemos decir que para la valoración de opciones existen dos métodos fundamentales. El denominado método binomial puede aplicarse en todos los casos, pero exige un elevado número de cálculos (si bien fáciles de programar en ordenador). El segundo método consiste en el empleo de la fórmula de Black y Scholes, relativamente sencilla, pero cuya validez está limitada a ciertos casos. En la práctica, la utilización de un método u otro depende del tipo de opción a valorar, según se indica en el siguiente Cuadro:

---

(1) Este método lo introdujo Fischer Black en su artículo «Fact and Fantasy in the Use of Options», *Financial Analysts Journal*, julio-agosto de 1975, págs. 36-72.

(2) Véanse: Whaley, Robert E., «Valuation of American Call Options on Dividend-Paying Stocks», *Journal of Financial Economics*, vol. 10, 1982, págs. 29-58, y Geske, Robert y Richard Roll, «On Valuing American Call Options with the Black-Scholes European Formula», *Journal of Finance*, junio de 1984, págs. 443-455.

Sin dividendos	«Put»	«Call»
Opción europea	Black-Scholes	Black-Scholes
Opción americana	Binomial	Black-Scholes
Con dividendos	«Put»	«Call»
Opción europea	Binomial o Black-Scholes corregida	
Opción americana	Binomial	Binomial o Black-Scholes corregida

13. Volatilidad implícita

En muchas ocasiones conocemos el precio de las opciones; por ejemplo, cuando vemos sus precios en el mercado. La cuestión que entonces nos preguntamos con frecuencia es cuál es la volatilidad implícita en ese precio, esto es, qué volatilidad hemos de utilizar en la fórmula de valoración para obtener el precio que observamos en el mercado.

Ejemplo. Calcular la volatilidad implícita de las siguientes opciones europeas sobre una acción de la empresa X, que se podrán ejercer dentro de 5 meses; r = 1,10. El precio de la acción de X es 400 pesetas.

K	*«Call»*	*«Put»*
300	118,05	6,37
400	53,50	37,92
500	20,28	100,82

Solución Para todas las opciones se comprueba que la volatilidad anual de la acción (suponiendo que no repartirá dividendos durante los próximos 5 meses) es 45% anual. □

Apéndice 1

UTILIZACION DE LA FORMULA DE BLACK Y SCHOLES
PARA VALORAR OPCIONES

Hipótesis bajo las que se ha derivado la fórmula de Black y Scholes

Las hipótesis necesarias para derivar la fórmula de Black y Scholes son las siguientes:

– H1: no hay costes de transacción, ni comisiones ni impuestos diferenciales. Esto no significa que no se admita la existencia de impuestos, sino que los impuestos afectan de igual modo al rendimiento de las acciones que al de la deuda.

– H2: se puede tomar dinero prestado e invertir en renta fija al mismo tipo de interés y sin restricciones.

– H3: la tasa de interés sin riesgo, r, es conocida y constante en el intervalo comprendido entre T = 0 y T = t.

– H4: La venta a crédito de acciones, con total uso del dinero procedente de la venta, no tiene ninguna restricción.

– H5: Se pueden comprar y vender acciones continuamente.

– H6: El movimiento del precio de la acción se puede describir como un proceso de difusión. Una implicación directa de esta hipótesis es que el rendimiento diario de la acción seguirá una distribución normal.

– H7: La acción a la que se refiere la «call» no paga dividendos entre T = 0 y T = t.

Con estas hipótesis, Black y Scholes demostraron que se puede construir una cartera de valores (cartera réplica) con acciones y bonos (o tomando dinero prestado) de manera que el rendimiento de la cartera réplica sea exactamente igual que el rendimiento de una opción de compra en un intervalo de tiempo muy corto (dt). Haciendo cambios continuos en la composición de la cartera réplica (con el transcurso del tiempo y cuando cambia el precio de la acción), es posible lograr que la cartera réplica tenga un comportamiento idéntico al de la opción. Por tanto, el precio de la opción será en T = 0 igual al precio de la cartera réplica.

Las hipótesis pueden parecer poco razonables para un inversor pequeño. Sin embargo, son bastante aceptables para los inversores institucionales, los cuales cumplen las cinco primeras hipótesis adecuadamente. La hipótesis H7 simplemente hace referencia a que no habrá dividendos entre T= 0 y T = t. Para el caso de que la acción reciba dividendos, la fórmula de Black y Scholes se adapta muy fácilmente.