DERIVADOS EXÓTICOS
INDICE

1. Introducción

En este documento de investigación hacemos una descripción y una clasificación de los derivados exóticos más utilizados. También proporcionamos fórmulas de valoración para muchos de ellos y análisis de sensibilidad de sus valores. Muchos de los análisis de sensibilidad proceden de consultas realizadas a entidades financieras y empresas que se han planteado la posibilidad de comprar o vender alguno de estos productos. Analizamos sólo derivados exóticos con una acción como subyacente. El análisis de derivados exóticos sobre divisas, renta fija o materias primas es totalmente análogo: las fórmulas de valoración que siguen también sirven, basta introducir el ajuste correspondiente a la tasa de interés de la moneda extranjera (divisas), cupones (renta fija) y los costes de almacenaje...(materias primas).

1.1. Descripción del precio de la acción

Es habitual suponer que un inversor que compra una acción espere una rentabilidad de la forma:

$$\mu\, t = E\,[\mathrm{Ln}\,(S_t / S)] \qquad (1.1)$$

Por otro lado, la evidencia apunta a que el rendimiento futuro de la acción se aproxima a una distribución normal con varianza:

$$\sigma^2\, t = \mathrm{Var}\,[\mathrm{Ln}\,(S_t / S)] \qquad (1.2)$$

siendo S el precio de la acción en t = 0, esto es, en el momento presente.

Sabemos la media y la varianza del rendimiento esperado de la acción. Nos queda definir el proceso de modo que su media y su varianza vengan dadas por (1.1) y (1.2). El proceso estocástico que cumple ambas restricciones es:

$$\mathbf{S_t = S\, e^{(\mu\, t\, +\, s\, e\, vt)}} \qquad (1.3)$$

donde ε es una variable aleatoria normal de media cero y varianza unidad: $\varepsilon \sim N(0, 1)$

R_t es la rentabilidad de mantener la acción entre t = 0 (el precio de la acción en t = 0 es S) y t = t (el precio de la acción en t = t es S_t).

$$\mathbf{R_t = \ln\,(S_t / S)} \qquad (1.4)$$

De (1.3) y (1.4) se deduce: $\mathbf{R_t = \mu\, t + s\, e\, vt}$ (1.5)

y por consiguiente[1]: $dR_t = R_{t + dt} - R_t = \mu\, dt + \sigma\, \varepsilon\, vdt$. (1.6)

El proceso ε vdt se denomina proceso de Gauss-Weiner y se escribe dZ, siendo dZ = ε vdt. También se denomina movimiento browniano estándar. Utilizamos a continuación esta notación (dZ) por comodidad.

Las figuras 1.1 y 1.2 muestran un ejemplo de las fórmulas (1.3) y (1.4). Ambas figuras permiten observar el significado de la volatilidad (mayor dispersión futura de la rentabilidad y del precio de la acción) y del parámetro μ (valor esperado de la rentabilidad). Nótese que aunque E (R_t) = μ t; E (S_t) ? S $e^{\mu t}$. Por otro lado, por ser la

[1] En el anexo 13.1 de Fernández (1996) se muestra cómo pasar de (1.5) a (1.6).

distribución del precio de la acción lognormal, el valor esperado del precio de la acción (S $e^{(\mu + (1/2)\sigma 2)t}$), no coincide con la moda (S $e^{(\mu - \sigma 2)t}$), ni con la mediana (S $e^{\mu t}$).

La función de densidad de la rentabilidad de la acción (la rentabilidad anualizada esperada de la acción es μ y la volatilidad anualizada esperada es σ) es una distribución normal:

$$\mathbf{f(R_t) = e^{-0,5\ [(R_t - \mu t)\ /\ s\ vt]2}\ /\ s\ v(2pt)} \qquad \mathbf{(1.7)}$$

La función de densidad del precio futuro de la acción es una distribución lognormal:

$$\mathbf{f(S_t) = e^{-0,5\ \{[\ln(S_t/S_0) - \mu t]\ /\ s\ vt\}2}\ /\ S\ s\ v(2pt)(1.8)}$$

Figura 1.1. Distribución de probabilidad de la rentabilidad de la acción en un año de dos inversores con idéntica expectativa de rentabilidad (μ = 20%), pero distinta expectativa de volatilidad (s): uno espera una volatilidad del 20% y el otro una volatilidad del 30%. Se adjunta también la distribución de probabilidad de la rentabilidad de otro inversor que esté absolutamente seguro (volatilidad = 0) de una rentabilidad del 20%.

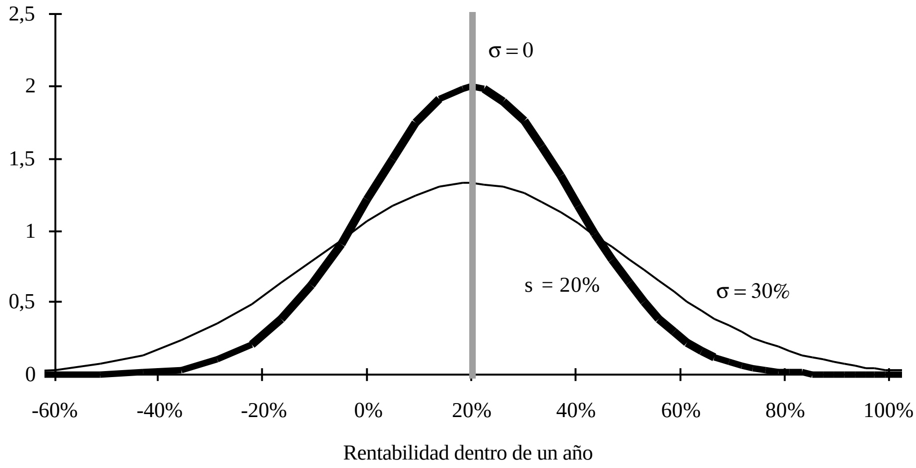
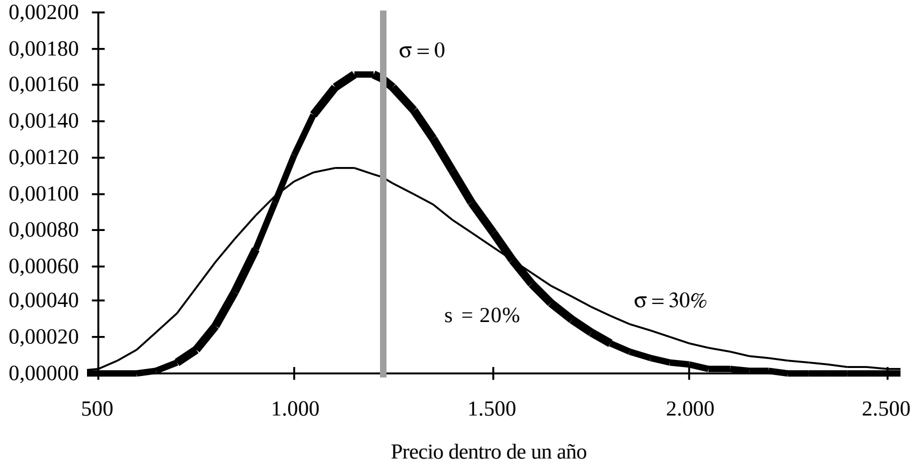


Figura 1.2. Distribución de probabilidad del precio de la acción dentro de un año (el precio hoy es 1.000 pesetas) de dos inversores con idéntica expectativa de rentabilidad (μ = 20%), pero distinta expectativa de volatilidad (s): uno espera una volatilidad del 20% y el otro una volatilidad del 30%. Se adjunta también la distribución de probabilidad del precio de la acción dentro de un año de otro inversor que esté absolutamente seguro (volatilidad = 0) de una rentabilidad del 20%.



Los teoremas del cálculo diferencial ordinario no son aplicables cuando tenemos ecuaciones con variables aleatorias como la (1.6), es necesario el lema de Itô[2].

1.2. Valoración de instrumentos derivados

Los instrumentos derivados pueden valorarse utilizando el método binomial, resolviendo la ecuación diferencial que lo caracteriza, por simulación o por el método de las martingalas.

El método de las martingalas propone calcular el valor actual neto del valor esperado del instrumento de un modo muy específico. El valor esperado del derivado se ha de calcular suponiendo que el activo subyacente se revaloriza a la tasa sin riesgo. El valor actual neto se ha de calcular actualizando ese valor esperado a la tasa sin riesgo.

Denominaremos en el presente documento E_Q al valor esperado del derivado suponiendo que el activo subyacente se revaloriza a la tasa sin riesgo, y VAN_Q al valor actual neto del valor esperado actualizado a la tasa sin riesgo.

Por ejemplo, el anexo 2 muestra cómo calcular la fórmula de Black y Scholes por este procedimiento. El valor de una call será VAN_Q [E_Q{ MAX(S-K; 0) }].

El anexo 3 muestra con mayor profundidad matemática el soporte de la valoración de activos derivados por el procedimiento de las martingalas.

2. Derivados exóticos

Se denominan opciones exóticas a todas las opciones no tradicionales, entendiendo por tradicionales las opciones que tienen precio de ejercicio fijo y cuyo valor depende del precio del subyacente en la fecha de ejercicio. Generalizando, se suele denominar opciones exóticas a

[2] El lema de Itô aparece en el capítulo 13 del libro Opciones, Futuros e instrumentos derivados de Pablo Fernández. Editorial Deusto. 1996.

todas aquellas cuyo valor en la fecha de ejercicio no es el de una call ni el de una put tradicionales: ni MAX (0; S_t - K) ni MAX (0; K - S_t).

A continuación se describen las opciones exóticas más importantes. Aunque para algunas de ellas se han desarrollado fórmulas explícitas, aconsejamos al lector que utilice también el método binomial y la simulación (cuando sea posible) para su valoración. El problema que presentan varias de las opciones exóticas es que no son perfectamente replicables, por lo que su valoración por los métodos basados en el arbitraje (binomial, simulación...) es muy cuestionable.

3. Opciones digitales

Son opciones parecidas a las put y las call tradicionales (tienen valor en el vencimiento cuando el subyacente es inferior o superior al precio de ejercicio, respectivamente), pero lo que se obtiene al ejercerla no es K-S (put) ni S-K (call). Los cuatro tipos principales que analizamos a continuación son: pulsos[3], opción sobre el subyacente, opción sobre otro activo (distinto del subyacente), opción digital correlacionada y opción con pago diferido.

3.1. Opción digital pura o pulso *(Cash or nothing)*.

3.1.1. Pulso call.

Valor en la fecha de ejercicio: D si S_t = K; 0 si S_t < K.

El valor del pulso call antes de la fecha de ejercicio es[4]:

$Call_{ODP}(D; S; K; t) = VAN_Q [E_Q\{ D \ \& \ S_t = K \}] = VAN_Q [D] P_Q (S_t = K)$.

$VAN_Q [D] = D r^{-t}$. En el anexo 2 se demuestra que $P_Q (S_t = K) = N (x - \sigma vt)$.

Por consiguiente:

$Call_{ODP}(D; S; K; t) = D r^{-t} N (x - s\ vt)$. **(3.1)**

$x =[Ln(S/Kr^{-t}) + s^2 t/2] / (s vt)$ **(3.2)**

La delta del pulso call es: $?_{ODP} = D r^{-t} N' (x - \sigma vt) /(S \sigma vt)$

La valoración del pulso se ha realizado por el método de las martingalas[5] (idéntico al seguido en el anexo 2 para obtener la fórmula de Black y Scholes). El valor del pulso call antes de la fecha de ejercicio es el valor actual neto (descontando a la tasa sin riesgo) del valor esperado del activo derivado (suponiendo que el valor esperado de la rentabilidad del subyacente es también la tasa sin riesgo). Por consiguiente:

La delta del pulso call es: $?_{ODP} = D r^{-t} N' (x - \sigma vt) /(S \sigma vt)$

3.1.2. Pulso put.

Valor en la fecha de ejercicio: D si S_t = K; 0 si S_t > K.

El valor del pulso put antes de la fecha de ejercicio es:

$Put_{ODP}(D; S; K; t) = VAN_Q [E_Q\{ D \ \& \ S_t = K \}] = VAN_Q [D] P_Q (S_t = K)$.

---

[3] También se denominan opciones binarias. Por ejemplo, en el capítulo 19 de Jarrow y Turnbull (1996).

[4] En este documento utilizaremos el operador &. Por ejemplo, {D & S_t = K} significa:

D si S_t = K

0 si S_t < K

[5] Una descripción de la valoración de activos financieros por el método de las martingalas puede encontrarse en Ariño, Miguel A. y Pablo Fernández, "Valoración de activos financieros por el método de las martingalas", Investigaciones Económicas, Volumen XVI, nº 1, 1992, pg. 89-97.

$VAN_Q [D] = D\ r^{-t}$ y $P_Q (S_t = K) = 1 - P_Q (S_t = K) = 1 - N (x - \sigma \sqrt{t}) = N (-x + \sigma \sqrt{t})$

Por consiguiente:

$$\mathbf{Put_{ODP}(D; S; K; t) = D\ r^{-t}\ N (-x + \sigma \sqrt{t}).} \qquad \mathbf{(3.3)}$$

$$\mathbf{x = [Ln(S/Kr^{-t}) + \sigma^2 t/2] / (\sigma \sqrt{t})} \qquad \mathbf{(3.4)}$$

La figura 3.1 muestra el valor al vencimiento y el valor un año antes del vencimiento (para tres volatilidades distintas y en función del precio de la acción) de un pulso call con precio de ejercicio (K) 1.000 pesetas y un valor del pulso (D) también igual a 1.000 pesetas. La figura 3.2 muestra cómo afecta el tiempo hasta el vencimiento al valor del pulso.

La figura 3.3 muestra el valor al vencimiento y el valor un año antes del vencimiento de un pulso put de iguales características al pulso call de la figura 3.1.

Es evidente que Pulso call + Pulso put = $D\ r^{-t}$. Es también inmediato comprobar que si K=0, Pulso call = $D\ r^{-t}$. Para K muy elevado, Pulso put = $D\ r^{-t}$.

La figura 3.4 muestra la delta del pulso call.

3.1.3. Opción rango *(range digital option)*

Valor en la fecha de ejercicio: D si $K_1 < S_t < K_2$; 0 en caso contrario[6].

Es evidente que esta opción está compuesta por dos pulsos call: uno comprado con precio de ejercicio K_1, y otro vendido con precio de ejercicio K_2.

Figura 3.1. Pulso call. ***(Opción digital pura). (Cash or nothing)*.**
K = 1000; t = 1 año; r = 1,1; D = 1.000

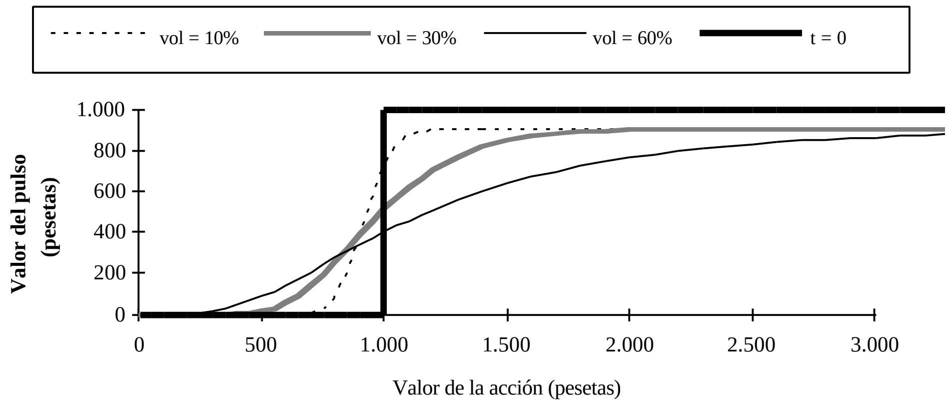


Figura 3.2. Pulso call. ***(Opción digital pura). (Cash or nothing)*.**
Efecto del paso del tiempo. K = 1000; σ = 60%; r = 1,1; D = 1.000

[6] Sobre la valoración de opciones digitales, opciones rango y bonos rango, recomendamos el artículo de Turnbull (1995).

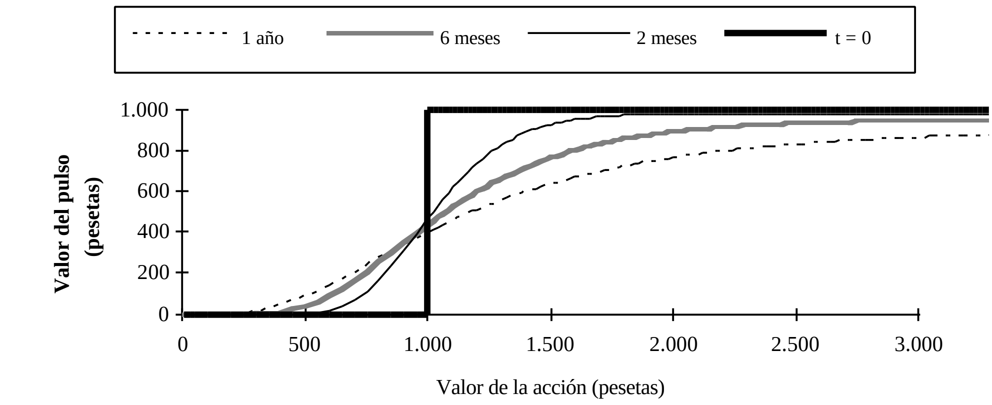


Figura 3.3. Pulso put. ***(Opción digital pura). (Cash or nothing)***
K = 1000; t = 1 año; r = 1,1; D = 1.000

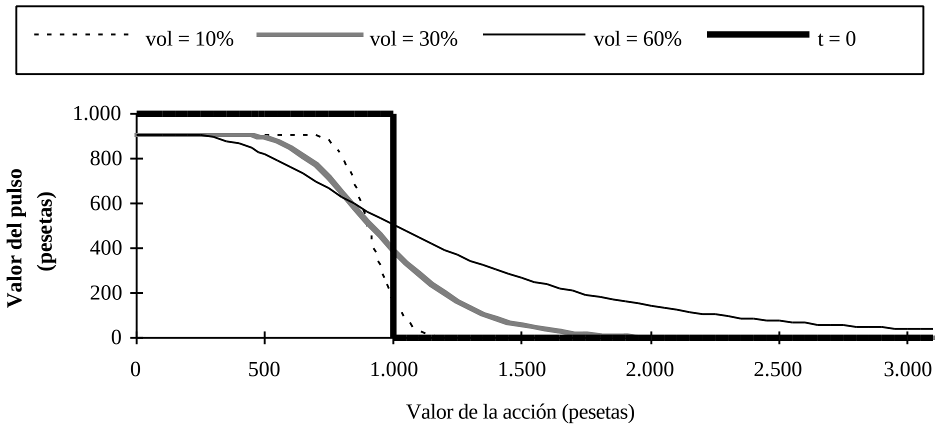
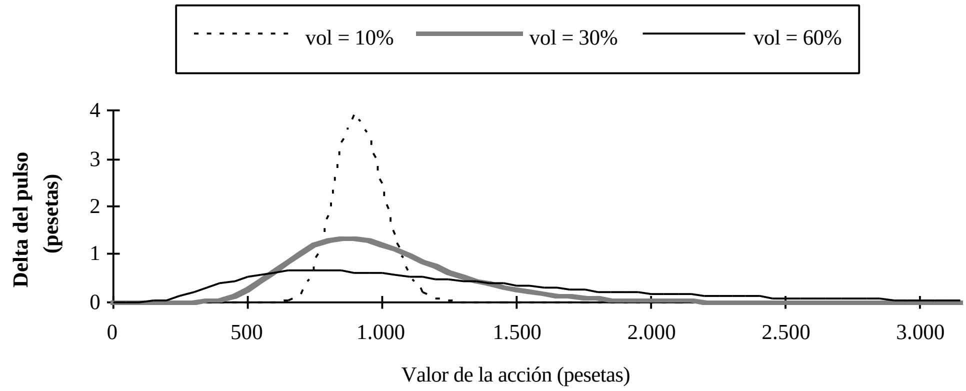


Figura 3.4. Delta del pulso call. ***(Opción digital pura). (Cash or nothing)*.**
K = 1000; t = 1 año; r = 1,1; D = 1.000



3.2. Opción sobre el subyacente *(ordinary asset or nothing)*[7]

Valor en la fecha de ejercicio: S_t si $S_t = K$; 0 si $S_t < K$

El valor antes de la fecha de ejercicio es[8]:

$C_{OTS}(D; S; K; t) = VAN_Q [\ E_Q\{ S_t \ \&\ S_t = K \}]$

En el anexo 2 se demuestra que $E_Q\{ S_t \ \&\ S_t = K \} = S\, r^t\, N(x)$.

Es evidente que $VAN_Q [\ S\, r^t\, N(x)] = S\, N(x)$

Por consiguiente

$$\mathbf{C_{OTS} = S\ N(x).} \qquad \mathbf{(3.5)}$$

$$\mathbf{x = [Ln(S/Kr^{-t}) + s^2 t/2] \,/\, (s\,vt)} \qquad \mathbf{(3.6)}$$

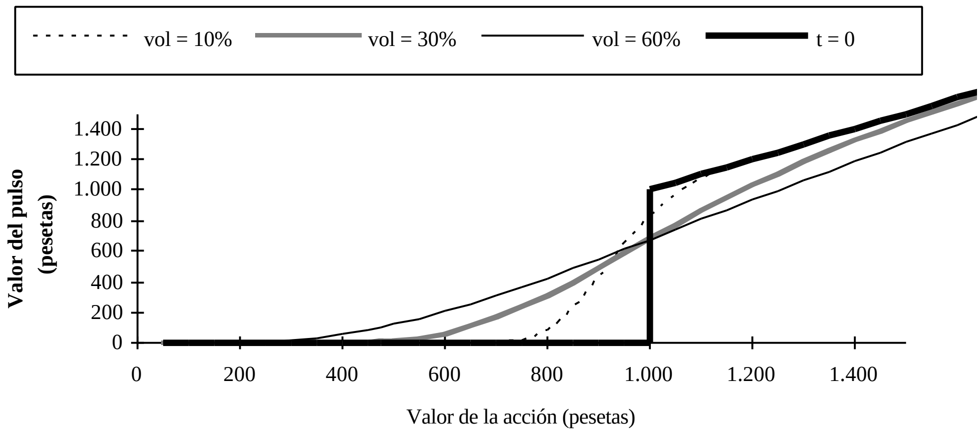
$?_{OTS} = N(x) + N'(x - \sigma\, vt) / (\sigma\, vt)$

Ver que esta opción es la suma de una opción digital pura call con D=K y una call europea estándar. La figura 3.5 muestra el valor al vencimiento y el valor un año antes del vencimiento (para tres volatilidades distintas y en función del precio de la acción) de una opción de tener el subyacente *(ordinary asset or nothing)* con precio de ejercicio (K) 1.000 pesetas.

Figura 3.5. Opción sobre el subyacente *(ordinary asset or nothing)*
Pulso. K = 1000; t = 1 año; r = 1,1; D = 1.000

[7] Cox y Rubinstein (1985), en la página 460 las denominan opciones incompletas.

[8] Este resultado se calcula en el capítulo 14 de Fernández (1996). La expresión (14.3) muestra que: $VAN\, [S_t / S_t > K]\, P[S_t > K] = r^{-t} E\, [S_t / S_t > K]\, P\, [S_t > K] = S\, N(x)$



3.3. Opción sobre otro activo *(another asset or nothing)*

Valor en la fecha de ejercicio: W_t si $S_t = K$; 0 si $S_t < K$

Esta opción nos permitirá tener un activo (por ejemplo una acción de precio W_t) si el precio de otro activo (por ejemplo una acción de precio S_t) es superior al precio de ejercicio K.

El valor de esta opción antes de la fecha de ejercicio es:

$C_{OA}(W; S; K; t) = VAN_Q [\ E_Q\{\ W_t\ \&\ S_t = K\ \}]$

Se puede demostrar fácilmente que $E_Q\{W_t\ \&\ S_t = K\} = N_2\ (x_w, x_s - \sigma_s \sqrt{t} + \rho\ \sigma_w \sqrt{t}, \rho\ )$

Siendo N_2 (a, b, ρ) la probabilidad acumulada de la distribución normal bivariante con límite superior a para la primera variable, b para la segunda y correlación ρ entre ambas variables. Por consiguiente:

$$\mathbf{C_{OA} = W\ N_2\ (x_w, x_s - s_s\ vt + r\ s_w\ vt,\ r\ ).} \qquad (3.7)$$

$$\mathbf{x_w = [Ln(W/Kr^{-t}) + s_w{}^2 t/2] / (s_w vt)} \qquad (3.8)$$

$$\mathbf{x_s = [Ln(S/Kr^{-t}) + s_s{}^2 t/2] / (s_s vt)} \qquad (3.9)$$

r es la correlación entre las rentabilidades de los precios de ambas acciones.

3.4. Opción digital correlacionada

Valor en la fecha de ejercicio: **Call:** W_t - X si $S_t = K$; 0 si $S_t < K$

Put: X - W_t si $S_t = K$; 0 si $S_t > K$

Valor de la call = $W\ N_2\ (x_w, x_s - \sigma_s \sqrt{t} + \rho\ \sigma_w \sqrt{t}, \rho\ )$

$$- X\ r^{-t}\ N_2\ (x_w - \sigma_w \sqrt{t}, x_s - \sigma_s \sqrt{t}\ , \rho\ ) \qquad (3.10)$$

Siendo N_2 (a, b, ρ) la probabilidad acumulada de la distribución normal bivariante con límite superior a para la primera variable, b para la segunda y correlación ρ entre ambas variables[9]. Ver que la opción sobre otro activo *(another asset or nothing)* es un caso particular de ésta: con X = 0.

3.5. Opción con pago diferido *(paylater options)*

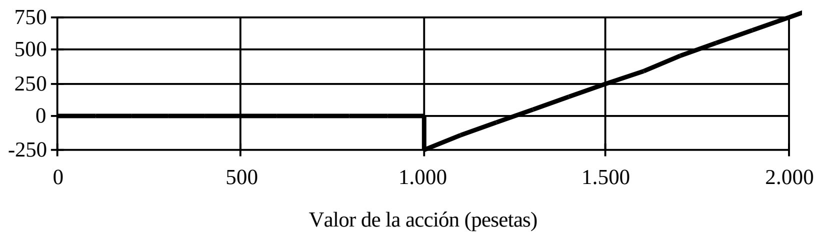
Valor en la fecha de ejercicio:

Call$_{\textbf{pago diferido}}$**:** S_t - K - C_{PD} si S_t = K; 0 si S_t < K

Put$_{\textbf{pago diferido}}$**:** K - S_t - P_{PD} si S_t = K; 0 si S_t > K

C_{PD} y P_{PD} son el valor de la call y la put que se pagarán en la fecha de ejercicio. En estas opciones no se paga nada hoy. El comprador de la opción debe pagar la prima en la fecha de ejercicio si la opción se ejerce. Nótese que el ejercicio es obligado para el comprador en situaciones que no le interesan: el comprador de una call está obligado a ejercerla si el precio de la acción en la fecha de ejercicio es superior al precio de ejercicio K, aunque no sea superior a K - C_{PD}. Por ejemplo, en la figura 3.6, si el valor de la acción en la fecha de ejercicio es 1.050 pesetas, el poseedor de la call deberá ejercerla y perderá 200 pesetas.

Figura 3.6. Call con pago diferido *(paylater call)*.
Valor en la fecha de ejercicio. K = 1.000; C_{PD} = 250.



La figura 3.6 permite concluir que una call con pago diferido es igual a una call ordinaria menos un pulso call con igual precio de ejercicio y D = C_{PD}. Cuando se emite la call con pago diferido (en t=0) su valor es cero, por consiguiente, en ese momento:

Call (S; K; t) = $Call_{ODP}$ (C_{PD}; S; K; t).

Por consiguiente: S N (x) - K r^{-t} N (x - σ vt) = C_{PD} r^{-t} N (x - σ vt). El precio de la call (C_{PD}), que se fija en t=0, es:

$\mathbf{C_{PD} = S\, r^{t}\, N(x)/N(x - s\ vt) - K}$, siendo x =[Ln(S/K$r^{-t}$) + σ^2t/2] / (σvt).

C_{PD} es siempre superior al valor de la call ordinaria equivalente: C_{PD} > Call (S; K; t). La ventaja de la call con pago diferido es que no se debe ejercer (y tampoco se paga C_{PD}) si el precio final de la acción es inferior a K.

Más adelante, cuando el tiempo hasta el ejercicio es T, el valor de la call con pago diferido es:

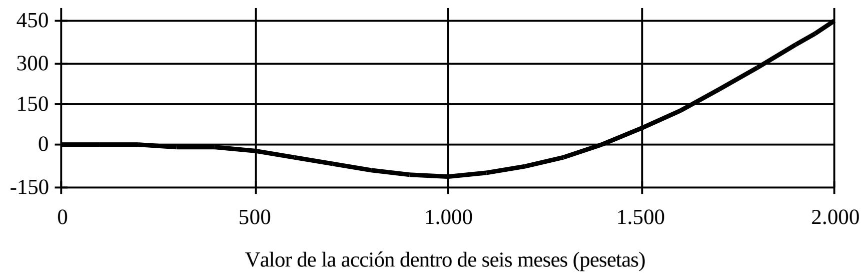
Call$_{\textbf{pago diferido}}$ **(C_{PD}; S; K; T) = Call (S; K; T) - Call$_{\textbf{ODP}}$ (C_{PD}; S; K; T)** (3.11)

[9] Para profundizar en estas opciones ver Zhang, Peter, "Correlation Digital Options", Journal of Financial Engineering, volumen 4, número 1, 1995.

Ejemplo. Calcular la prima de una call con pago diferido (C_{PD}) a un año sobre una acción cuyo precio hoy es 1.000 pesetas. La volatilidad esperada de la acción es 60%. r = 1,1. El precio de ejercicio de la opción es 1.000 pesetas. La acción no repartirá dividendos durante el próximo año.

El valor de la call europea ordinaria de estas características es Call (1.000; 1.000; 1 año) = 273,31 pesetas. Es inmediato comprobar que r^{-t} N (x - σ vt) = 0,4035. Por consiguiente, C_{PD} = 677,3 pesetas. ¿Cuál será el valor de la call con pago diferido dentro de seis meses? Ya hemos señalado que el valor de una call con pago diferido es igual a una call ordinaria menos un pulso call con igual precio de ejercicio y D = 677,3. La figura 3.7 muestra el valor de la call con pago diferido dentro de seis meses en función del precio de la acción en ese momento.

Figura 3.7. Call con pago diferido *(paylater call)*. Valor dentro de seis meses.
K = 1.000 pesetas; C_{PD} = 677,3; s = 60%; t = 6 meses; r = 1,1.



La figura 3.8 muestra el valor de una put con pago diferido en la fecha de ejercicio. La figura 3.8 permite concluir que una put con pago diferido es igual a una put europea ordinaria menos un pulso put con igual precio de ejercicio y D = P_{PD}. Cuando se emite la put con pago diferido su valor es cero, por consiguiente, en ese momento:

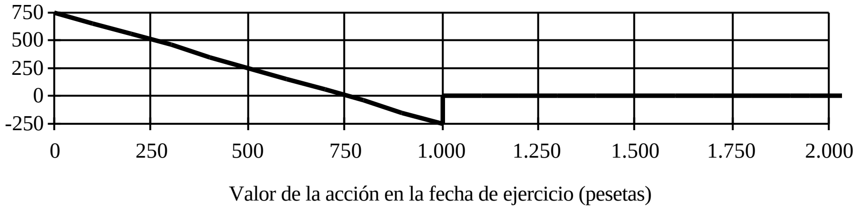
Put (S; K; t) = Put_{ODP} (P_{PD}; S; K; t).

P_{PD} es superior al valor de la put europea ordinaria equivalente: P_{PD} > Put (S; K; t). La ventaja de la put con pago diferido es que no se debe ejercer (y tampoco se paga P_{PD}) si el precio final de la acción es superior a K.

Más adelante, cuando el tiempo hasta el ejercicio es T, el valor de la put con pago diferido es:

$Put_{pago\ diferido}$ (P_{PD}; S; K; T) = Put (S; K; T) - Put_{ODP} (P_{PD}; S; K; T) (3.12)

Figura 3.8. Put con pago diferido *(paylater put)*.
Valor en la fecha de ejercicio. K = 1.000; P_{PD} = 250.



4. Opciones con valor dependiente de la trayectoria del subyacente

4.1. Opciones "lookback"

Se denominan opciones "lookback" a aquéllas cuyo valor depende de la cotización máxima o mínima alcanzada por el subyacente. S es la cotización de la acción hoy.

Si M = MAX $(S, S_1, ..., S_t)$ y m = MIN $(S, S_1, ..., S_t)$, podemos definir $R_M = \ln(M/S)$ y $R_m = \ln(m/S)$. Una fórmula muy útil para valorar este tipo de opciones es la que nos proporciona la probabilidad de que R_M sea inferior[10] a un valor z (z = 0):

$P (R_M = z) = N [(z - \mu t)/(\sigma\, vt)] - e^{2\mu z/\sigma 2} N [(-z - \mu t)/(\sigma\, vt)]$

La figura 4.1 muestra gráficamente esta probabilidad. En dicha figura se observa que cuanto menor es el tiempo hasta el vencimiento, antes se alcanza la probabilidad 1, es decir, es más probable que R_M sea inferior a un determinado valor z.

Análogamente, la probabilidad de que R_m sea superior a un valor z (z = 0) es:

$P (R_m = z) = N [(-z + \mu t)/(\sigma\, vt)] - e^{2\mu z/\sigma 2} N [(z + \mu t)/(\sigma\, vt)]$

La figura 4.2 representa dicha probabilidad. Se puede observar cómo, para un determinado valor de z, la probabilidad de que R_m sea superior a éste es mayor conforme menor es el tiempo que falta para el vencimiento.

Recordar que para valorar derivados que se pueden replicar, hemos de utilizar la siguiente relación: $\mu = \ln(r) - \sigma^2/2$.

Figura 4.1. P (R_M = z)

s **= 30%; r = 1,1; μ = ln(r) -** s**^{2}/2**

[10] La demostración de estos resultados puede encontrarse en el libro de Harrison, *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems*, Wiley, New York, 1985.

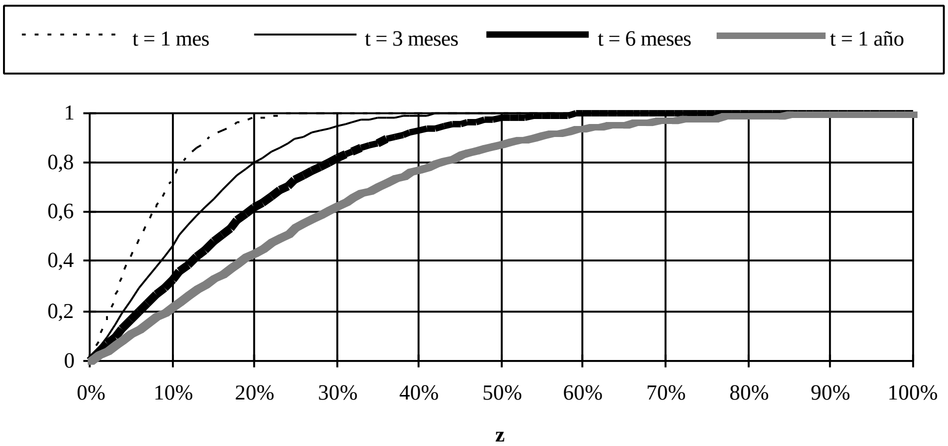
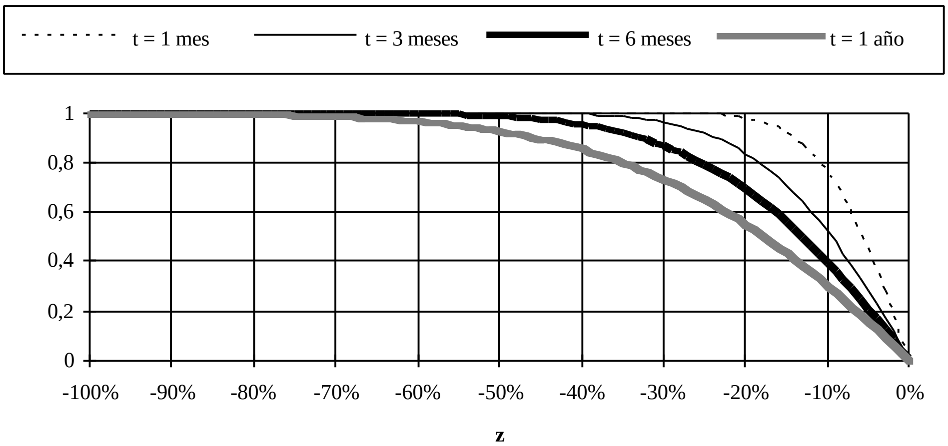


Figura 4.2. P (R_m = z)

s = 30%; r = 1,1; µ = ln(r) - $s^2/2$



4.1.1. Call "lookback"(subyacente)

Valor en la fecha de ejercicio: Max (0; MAX (S, S_1, ..., S_t) - K).

Las call "lookback"(subyacente), aunque sean americanas, pueden valorarse mediante simulación porque nunca es óptimo ejercerlas anticipadamente. La expresión que proporciona el valor de una call "lookback"(subyacente) emitida hoy[11] sobre una acción que no reparte dividendos es

Si K > S: $\text{Call}_{\text{lookback}}S = S\ N(x) - K\ r^{-t}\ N(x - \sigma vt) +$

$+ S\ r^{-t}\ (0{,}5\ \sigma^2 / \ln(r)) \left[r^t N(x) - (K/S)^{2\ln(r)/\sigma 2}\ N(x - 2\ln(r)\ vt / \sigma) \right]$ (4.1)

$x = \text{Ln}\ (S / Kr^{-t}) / (\sigma\ vt) + \sigma\ vt / 2.$ (4.2)

Nótese que los dos primeros términos corresponden al valor de una call europea ordinaria con precio de ejercicio K. Es el tercer término el que añade más valor a la call "lookback"(subyacente) respecto a la call ordinaria.

Si K < S: $\text{Call}_{\text{lookback}}S = +S\ N(x_1) - S\ r^{-t}\ N(x_1 - \sigma\ vt) + r^{-t}\ (S - K) +$

$+ S\ r^{-t}\ (0{,}5\ \sigma^2 / \ln(r)) \left[r^t N(x_1) - N(x_1 - 2\ln(r)\ vt / \sigma) \right]$ (4.3)

$x_1 = \text{Ln}\ (r^t) / (\sigma\ vt) + \sigma\ vt / 2.$ (4.4)

Véase que los dos primeros términos corresponden al valor de una call europea ordinaria con precio de ejercicio K=S. Los términos tercero y cuarto añaden más valor a la call "lookback"(subyacente) respecto a la call ordinaria.

La figura 4.3. muestra el valor de una call "lookback"(subyacente). Nótese cómo éste va disminuyendo conforme se aproxima la fecha de ejercicio.

En la figura 4.4 se observa cómo influye el precio de ejercicio en el valor de una call "lookback"(subyacente): cuanto menor es el precio de ejercicio, mayor es su valor.

La figura 4.5 compara una call "lookback"(subyacente) con una call ordinaria. Nótese que el valor de la primera está siempre por encima de la segunda, derivado del hecho de que en la valoración de la call "lookback"(subyacente) se tiene en cuenta el máximo valor alcanzado por el subyacente.

Figura 4.3. Call "lookback"(subyacente)
s **= 40%; K = 1.000; r = 1,1**

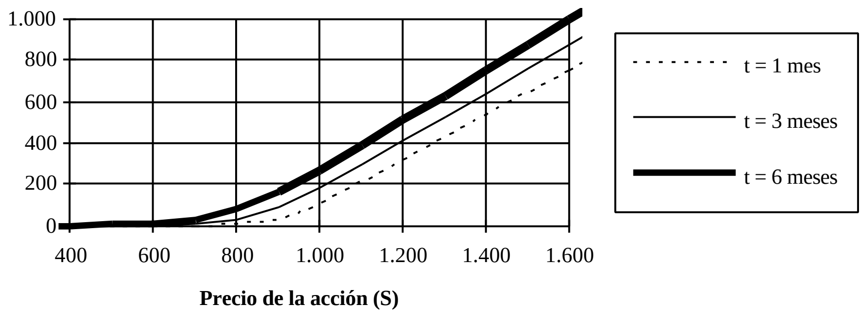


Figura 4.4. Call "lookback"(subyacente)

[11] Si la opción se hubiera emitido en el pasado, las fórmulas son un poco más complejas. Para profundizar en estas opciones ver Conze, A. y Viswanathan, "Path Dependent Options: The case of Lookback Options", Journal of Finance, 46, 1991. Pg. 1893-1907.

s = 40%; t = 6 meses; r = 1,1

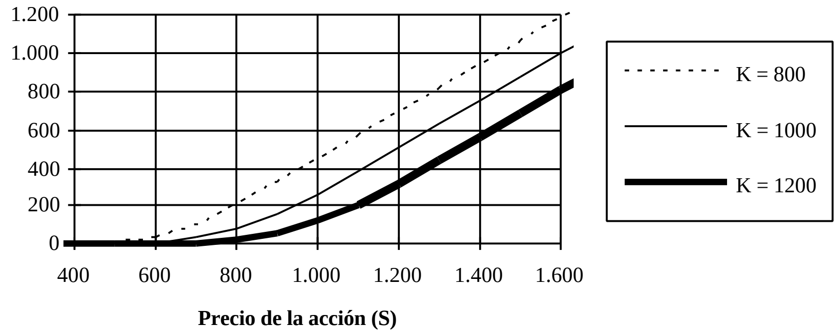
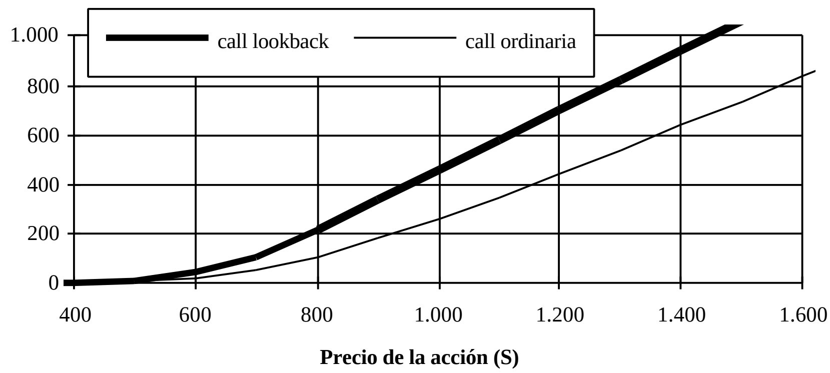


Figura 4.5. Comparación de una call "lookback"(subyacente) con una call ordinaria
s = 40%; t = 6 meses; r = 1,1; K = 800



Para calcular el valor de una call "lookback"(subyacente) sobre una acción que reparte dividendos (siendo el valor actual de los mismos D), basta sustituir el valor de S por S-D.

Ejemplo. Considerar una call "lookback" sobre el IBEX con tres meses hasta el ejercicio y precio de ejercicio 3.900 pesetas. Cada punto del IBEX se considera una peseta. El IBEX hoy es 3.900 puntos. Los dividendos anuales del IBEX se estiman en 4,08% del índice hoy, la volatilidad esperada es 28% y la tasa de interés sin riesgo es 7,25%.

El valor de la call "lookback" resulta ser 443 pesetas. Este valor contrasta con el de la call ordinaria de iguales características: 229 pesetas. Con volatilidad del 20%, el valor de la call "lookback" es 312 pesetas y el de la call ordinaria de iguales características 168 pesetas.

4.1.2. Put "lookback" (subyacente)

Valor en la fecha de ejercicio: Max (0; K - MIN (S, S_1, ..., S_t)).

La expresión que proporciona el valor de una put "lookback"(subyacente) sobre una acción que no reparte dividendos es:

Si K < S: $Put_{lookback}S = K r^{-t} N(-x + \sigma vt) - S N(-x) +$

$+ S r^{-t} (0{,}5 \sigma^2 / \ln(r)) \left[(K/S)^{2\ln(r)/\sigma 2} N(-x + 2\ln(r) vt / \sigma) - r^t N(-x) \right]$ (4.5)

$x = Ln (S / Kr^{-t}) / (\sigma vt) + \sigma vt / 2.$ (4.6)

Nótese que los dos primeros términos corresponden al valor de una put europea ordinaria con precio de ejercicio K. Es el tercer valor el que añade más valor a la put "lookback"(subyacente) respecto a la put ordinaria.

Si K > S: $Put_{lookback}S = -S N(-x_1) + S r^{-t} N(-x_1 + \sigma vt) + r^{-t} (K - S) +$

$+ S r^{-t} (0{,}5 \sigma^2 / \ln(r)) \left[-r^t N(-x_1) + N(-x_1 + 2\ln(r) vt / \sigma) \right]$ (4.7)

$x_1 = Ln (r^t) / (\sigma vt) + \sigma vt / 2.$ (4.8)

Véase que los dos primeros términos corresponden al valor de una put europea ordinaria con precio de ejercicio K=S. Los términos tercero y cuarto añaden más valor a la put "lookback"(subyacente) respecto a la put ordinaria.

La figura 4.6 muestra el valor de una put "lookback"(subyacente). Se puede observar cómo el paso del tiempo influye en términos de menor valor de la opción.

En la figura 4.7 se observa que cuanto mayor es el precio de ejercicio, mayor es el valor de la put "lookback"(subyacente).

La figura 4.8 muestra la comparación entre una put "lookback"(subyacente) y una put ordinaria. Nótese que el valor de la primera es siempre superior al de la put ordinaria, debido a que la valoración de la put "lookback"(subyacente) se realiza teniendo en cuenta el mínimo de los precios del subyacente.

Figura 4.6. Put "lookback"(subyacente)
s **= 40%; K = 1.000; r = 1,1**

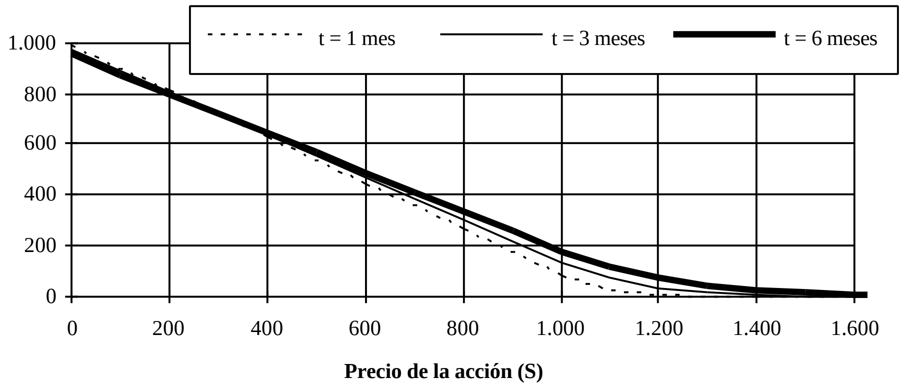


Figura 4.7. Put "lookback"(subyacente)
s **= 40%; t = 6 meses; r = 1,1**

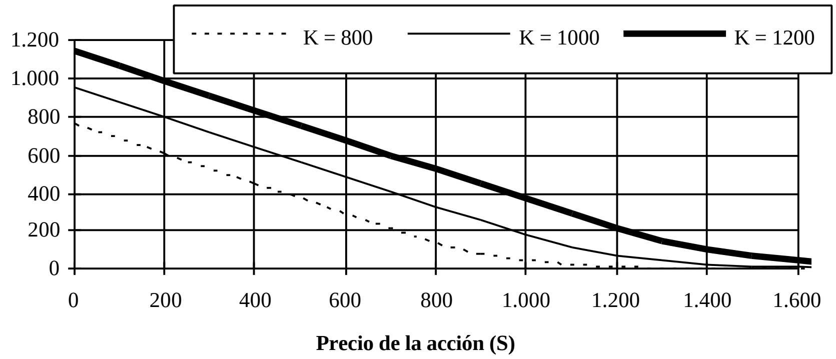
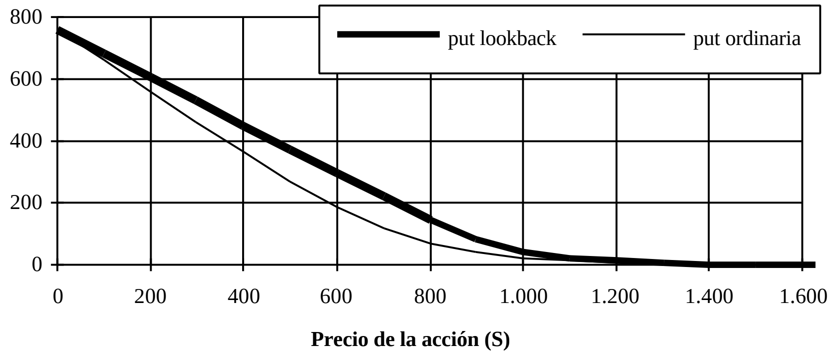


Figura 4.8. Comparación de una put "lookback"(subyacente) con una put ordinaria
s = 40%; t = 6 meses; r = 1,1; K = 800



Para calcular el valor de una put "lookback"(subyacente) sobre una acción que reparte dividendos (siendo el valor actual de los mismos D), basta sustituir el valor de S por S-D.

Ejemplo. Considerar una put "lookback" sobre el IBEX con tres meses hasta el ejercicio y precio de ejercicio 3.900 pesetas. El IBEX hoy es 3.900 puntos. Los dividendos anuales del IBEX se estiman en 4,08% del índice hoy, la volatilidad esperada es 28% y la tasa de interés sin riesgo es 7,25%.

Con volatilidad del 28%, el valor de la put "lookback" resulta ser 416 pesetas y el de la put ordinaria de iguales características 201 pesetas. Con volatilidad del 20%, el valor de la put "lookback" es 303 pesetas y el de la put ordinaria de iguales características 140 pesetas.

4.1.3. Call "lookback"(precio de ejercicio)

Valor en la fecha de ejercicio: S_t - MIN $(S, S_1, ..., S_t)$.

El valor de la call "lookback"(precio de ejercicio) antes de la fecha de ejercicio es:

$$\text{Call}_{\text{lookback}}\text{K (S; }\sigma\text{; r; t)} = \text{VAN}_Q\ [\ E_Q\{\ S_t - \text{MIN (S, } S_1, ..., S_t)\ \}] =$$

$$= \text{VAN}_Q\ [\ S_t - E_Q\{\text{MIN (S, } S_1, ..., S_t)\ \}] = S - r^{-t}\ [\ E_Q\{\text{MIN (S, } S_1, ..., S_t)\ \}].$$

Un poco de álgebra, permite comprobar que la expresión que proporciona el valor de una call "lookback"(precio de ejercicio) que se emite hoy sobre una acción que no reparte dividendos es:

$$\mathbf{Call_{lookback}K\ (S;\ \sigma;\ r;\ t) = S\ N(x) - S\ r^{-t}\ N(x - \sigma\sqrt{t}) +}$$

$$\mathbf{+ \left[S\ r^{-t}\ N\ (-x + 2\ \ln(r)\ \sqrt{t}\ /\sigma) \ - S\ N(-x)\right]\ [(0{,}5\ \sigma^2/\ \ln(r)]} \qquad \mathbf{(4.9)}$$

$$\mathbf{x = Ln\ (r^t)\ /\ (\sigma\ \sqrt{t}) + \sigma\ \sqrt{t}\ /\ 2.} \qquad \mathbf{(4.10)}$$

Los dos primeros términos corresponden a una call ordinaria con K=S. Es el tercer término el que añade valor a la call "lookback"(precio de ejercicio) respecto a la ordinaria.

La figura 4.9 muestra el valor de una call "lookback"(precio de ejercicio). Nótese que a medida que nos acercamos a la fecha de vencimiento, el valor de ésta disminuye.

Del mismo modo, en la figura 4.10 se observa que a medida que aumenta la volatilidad, el valor de la call "lookback"(precio de ejercicio) también aumenta.

En la figura 4.11 se compara una call "lookback"(precio de ejercicio) con una call ordinaria. Véase que el valor de la primera se sitúa siempre por encima del de la segunda, como consecuencia de utilizar en la valoración de la call "lookback"(precio de ejercicio) el mínimo de los precios del subyacente.

Figura 4.9. Call "lookback"(precio de ejercicio)
σ = 40%; r = 1,1

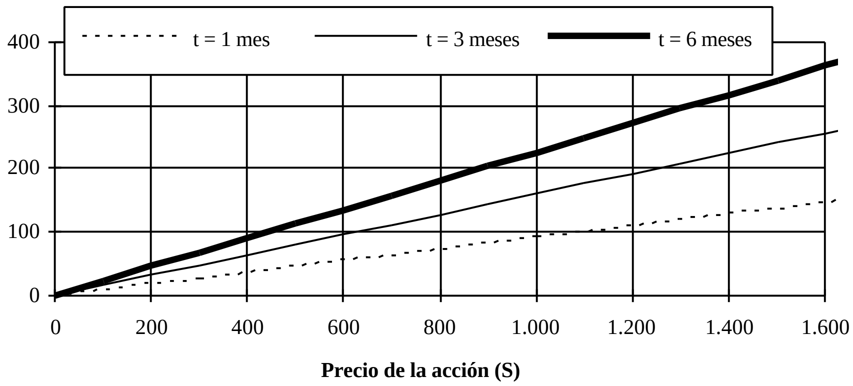


Figura 4.10. Call "lookback"(precio de ejercicio)
t = 6 meses; r = 1,1

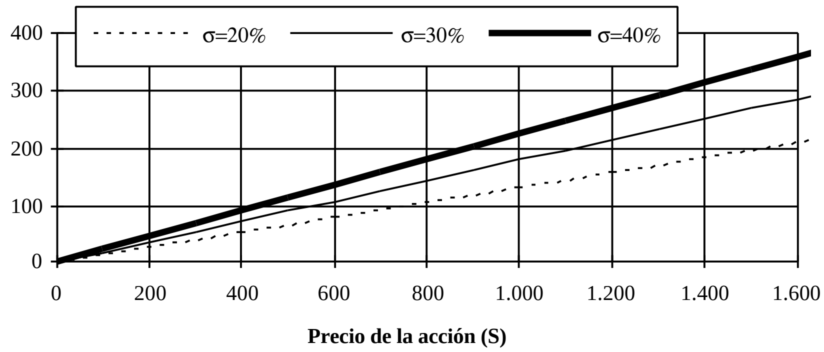
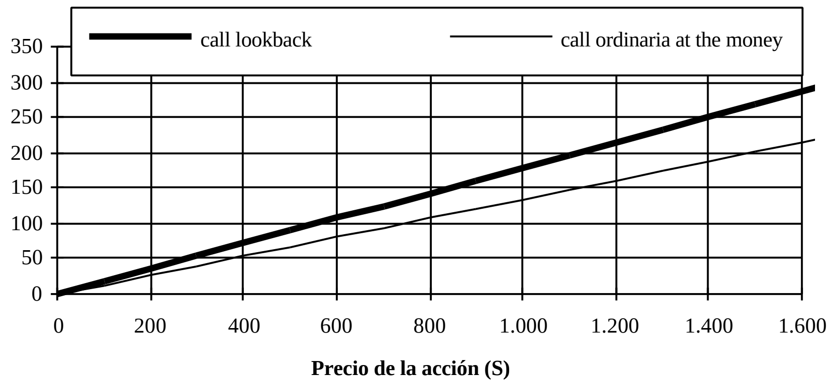


Figura 4.11. Comparación de una call "lookback"(precio de ejercicio) con una call ordinaria at the money
s = 30%; t = 6 meses; r = 1,1



Si la call "lookback"(precio de ejercicio) no se emite hoy, sino que fue emitida en el pasado, la fórmula que se ha de utilizar es distinta de la señalada porque el valor de la opción dependerá de la cotización mínima que haya tenido la acción desde la emisión de la opción hasta hoy.

4.1.4. Put "lookback"(precio de ejercicio)

Valor en la fecha de ejercicio: MAX $(S, S_1, ..., S_t) - S_t$.

La expresión que proporciona el valor de una put "lookback"(precio de ejercicio) que se emite hoy sobre una acción que no reparte dividendos es:

$Put_{lookback}K = S\, r^{-t} N(-x + \sigma vt) - S\, N(-x) +$

$$+ [S\ N(x) - S\ r^{-t}\ N\ (x - 2\ \ln(r)\ vt\ /\sigma)\ ]\ [(0{,}5\ \sigma^2/\ \ln(r)] \qquad (4.11)$$

$$x = \mathrm{Ln}\ (r^t)\ /\ (\sigma\ vt) + \sigma\ vt\ /\ 2. \qquad (4.12)$$

Los dos primeros términos corresponden a una put ordinaria con K=S. Es el tercer término el que añade valor a la put “lookback”(precio de ejercicio) respecto a la ordinaria.

La figura 4.12 muestra el valor de una put “lookback”(precio de ejercicio) y la influencia que en éste tiene el tiempo que falta hasta el vencimiento. Nótese que a medida que se acerca la fecha de ejercicio, el valor de la opción exótica se reduce.

Paralelamente, en la figura 4.13 se observa cómo afecta la volatilidad al valor de una put “lookback”(precio de ejercicio). Si la volatilidad del subyacente sufre un incremento, el valor de la opción también aumenta.

La figura 4.14 compara el valor de una put “lookback”(precio de ejercicio) con el de una put ordinaria *at the money*. Como puede observarse, el primero es superior al de la put ordinaria como consecuencia de la utilización del máximo precio del subyacente en la valoración de la opción exótica.

Figura 4.12. Put “lookback”(precio de ejercicio)
s **= 40%; r = 1,1**

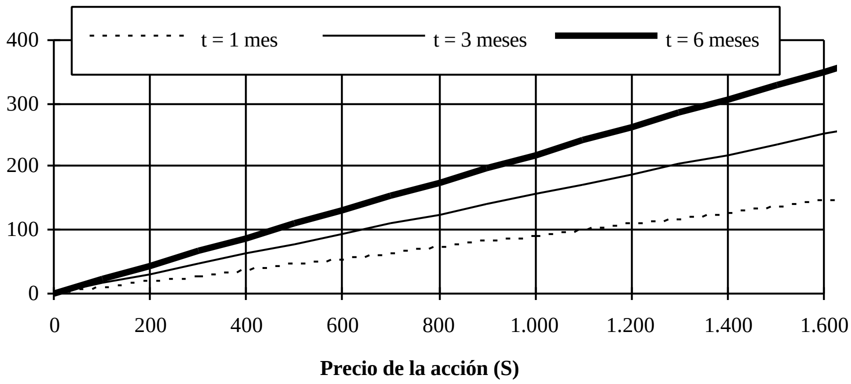


Figura 4.13. Put “lookback”(precio de ejercicio)
t = 6 meses; r = 1,1

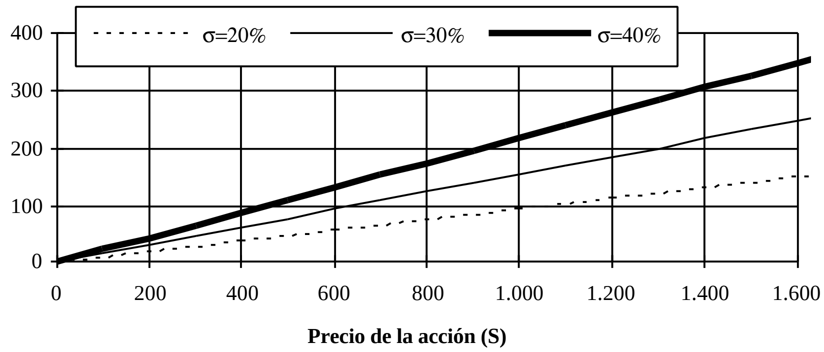
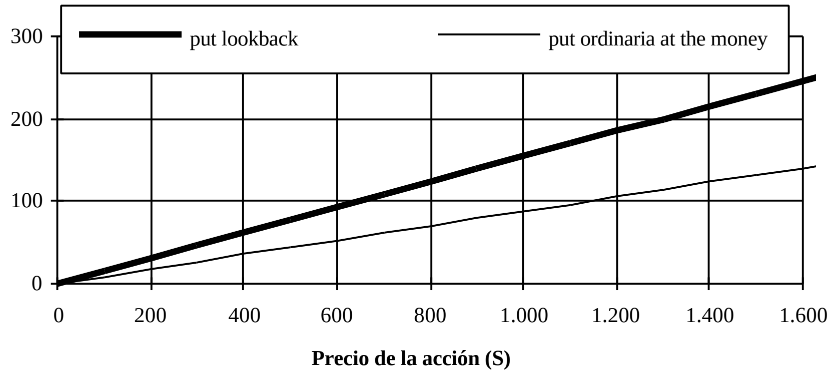


Figura 4.14. Comparación de una put "lookback"(precio de ejercicio) con una put ordinaria at the money
s **= 30%; t = 6 meses; r = 1,1**



Si la put "lookback"(precio de ejercicio) no se emite hoy, sino que fue emitida en el pasado, la fórmula que se ha de utilizar es distinta de la señalada porque el valor de la opción dependerá de la cotización máxima que haya tenido la acción desde la emisión de la opción hasta hoy.

4.1.5. Opción MAXIMIN

Valor en la fecha de ejercicio: MAX $(S, S_1, ..., S_t)$ - MIN $(S, S_1, ..., S_t)$.

Es evidente que el valor de esta opción es la suma de una call "lookback"(precio de ejercicio) y una put "lookback"(precio de ejercicio).

4.2. Opciones asiáticas

Se denominan opciones asiáticas a aquéllas cuyo valor depende del promedio de los valores que ha tenido el subyacente durante la vida (o parte de ella) de la opción.

Call asiática. Valor en la fecha de ejercicio: Max (0; $S_{promedio}$ - K)

Put asiática. Valor en la fecha de ejercicio: Max (0; K - $S_{promedio}$)

4.3. Opciones pseudo-asiáticas

Se denominan opciones pseudo-asiáticas a aquéllas cuyo precio de ejercicio es el promedio de los valores que ha tenido el subyacente durante la vida (o parte de ella) de la opción (promedio de valores para el precio de ejercicio).

Call pseudo-asiática. Valor en la fecha de ejercicio: Max (0; S_t - $S_{promedio}$)

Put pseudo-asiática. Valor en la fecha de ejercicio: Max (0; $S_{promedio}$ - S_t)

4.4. Opciones asiáticas geométricas

Estas opciones sí que pueden replicarse[12].

Call asiática geométrica. Valor en la fecha de ejercicio: Max (0; $S_{\text{media geométrica}}$ - K)

Put asiática geométrica. Valor en la fecha de ejercicio: Max (0; K - $S_{\text{media geométrica}}$)

Ejemplo. Calcular el valor de una call asiática, una put asiática, una call pseudo-asiática y una put una call asiática y una put asiática, todas ellas sobre el IBEX con tres meses hasta el ejercicio. El precio de ejercicio de las opciones asiáticas es 3.900 pesetas. El IBEX hoy es 3.900 puntos. Los dividendos anuales del IBEX se estiman en 4,08% del índice hoy, la volatilidad esperada es 28% y la tasa de interés sin riesgo es 7,25%.

Los cálculos se han realizado por simulación. Con volatilidad del 28%, el valor de la call asiática resulta ser 136 pesetas, el de la put asiática 121, el de la call pseudo-asiática 139 pesetas y el de la put pseudo-asiática 115. Con volatilidad del 20%, el valor de la call asiática resulta ser 99 pesetas, el de la put asiática 84, el de la call pseudo-asiática 101 pesetas y el de la put pseudo-asiática 80.

4.5. Opciones barrera o condicionales

Estas opciones son una call o put ordinaria con una barrera (B) que hace que la opción adquiera un valor fijo (L) si el máximo o el mínimo de los valores del subyacente han topado con la barrera. El valor en la fecha de ejercicio de las ocho opciones condicionales simples es:

	CALL	PUT	
Up and out.	Max (0; S_t - K)	Max (0; K - S_t)	si MAX (S, S_1, ..., S_t) = B
	L	L	si MAX (S, S_1, ..., S_t) > B
Down and out.	Max (0; S_t - K)	Max (0; K - S_t)	si MIN (S, S_1, ..., S_t) = B
	L	L	si MIN (S, S_1, ..., S_t) < B
Up and in.	Max (0; S_t - K)	Max (0; K - S_t)	si MAX (S, S_1, ..., S_t) = B
	0	0	si MAX (S, S_1, ..., S_t) < B
Down and in.	Max (0; S_t - K)	Max (0; K - S_t)	si MIN (S, S_1, ..., S_t) = B
	0	0	si MIN (S, S_1, ..., S_t) > B

[12] Un buen artículo para profundizar en las opciones asiáticas es Zhang, Peter, “Flexible Aritmetic Asian Options”, Journal of Derivatives, Spring 1995.

Las opciones *down and out* se denominan también opciones *knock-out* . Las opciones *down and in* se denominan también opciones *knock-in.*

En España ya se utilizan este tipo de opciones: los bonos bolsa emitidos por Caixa Cataluña en 1995[13] contienen una call "up and out" a 3 años con parámetros K = So, L = 1,2 So y B = 1,6 So, siendo So el valor del IBEX 35 en la fecha de emisión.

Existen muchos más tipos de opciones condicionales. Por ejemplo, aquéllas en las que la barrera se compara con un promedio de cotizaciones (en lugar de con un máximo o mínimo), aquéllas en que la barrera se especifica como un promedio de cotizaciones,...

Una buena referencia sobre opciones condicionales es Rubinstein y Reiner, "Breaking Down the Barriers", Risk 4(8), pág. 31-35.

El valor de una call *down and out* antes de la fecha de ejercicio es (suponiendo L = 0):

si B < K: $Call_{down\text{-}out\ (B<K)} = S\ N(x_1) - K\ r^{-t}\ N(x_1 - \sigma\ vt) -$

$- S\ (B/S)^{2ø+1}\ N(x_2) - K\ r^{-t}\ (B/S)^{2ø-1} N(x_2 - \sigma\ vt)$ (4.13)

$x_1 = Ln\ (S/Kr^{-t}) / (\sigma vt) + \sigma vt/2.$ (4.14)

$x_2 = Ln\ [B^2/(SKr^{-t})] / (\sigma vt) + \sigma vt/2.$ (4.15)

$ø = ln(r)/\sigma^2$ (4.16)

si B > K: $Call_{down\text{-}out\ (B>K)} = S\ N(x_3) - B\ r^{-t}\ N(x_3 - \sigma\ vt) + (B-K)\ r^{-t}\ N(x_3 - \sigma\ vt) -$

$- S\ (B/S)^{2ø+1}\ N(x_4) - K\ r^{-t}\ (B/S)^{2ø-1} N(x_4 - \sigma\ vt)$ (4.17)

$x_3 = Ln\ (S/Br^{-t}) / (\sigma vt) + \sigma vt/2.$ (4.18)

$x_4 = Ln\ [B/(Sr^{-t})] / (\sigma vt) + \sigma vt/2.$ (4.19)

$ø = ln(r)/\sigma^2$ (4.20)

En el caso de que L no sea cero, se debe sumar a los valores proporcionados el valor actual de L, que es:

$L\ [\ (B/S)^n\ N(x_5) - (B/S)^z\ N(x_6)],$ (4.21)

donde:

$x_5 = [\ Ln\ (B/S) + t\ q] / (\sigma vt).$ (4.22)

$x_6 = [\ Ln\ (B/S) - t\ q] / (\sigma vt).$ (4.23)

$q = [\ (Ln(r) - \sigma^2/2)^2 + 2\ ln(r)\sigma^2\ ]^{0,5}$ (4.24)

$n = ø - 0,5 + q/\sigma^2$ (4.25)

$z = ø - 0,5 - q/\sigma^2.$ (4.26)

Si K>B, el valor de una call *up and out* es cero.

Existen cuatro relaciones evidentes entre las opciones barrera:

$Call_{down\text{-}out} + Call_{down\text{-}in} = Call_{ordinaria}$

$Put_{down\text{-}out} + Put_{down\text{-}in} = Put_{ordinaria}$

$Call_{up\text{-}out} + Call_{up\text{-}in} = Call_{ordinaria}$

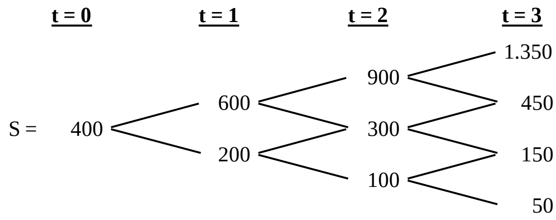
$Put_{up\text{-}out} + Put_{up\text{-}in} = Put_{ordinaria}$

[13] Una descripción de estos bonos aparece en el apartado 25.3 del libro Opciones, Futuros e instrumentos derivados de Pablo Fernández. Editorial Deusto. 1996.

4.6. Valoración de opciones dependientes de la trayectoria por el método binomial

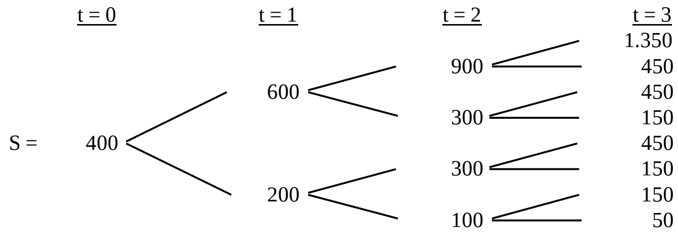
Valorar una opción especial sobre las acciones de la empresa ABC. La opción especial tiene las siguientes características. En cada uno de los siguientes tres periodos, el poseedor de la opción especial tiene el derecho a devolver la opción a la empresa y recibir a cambio un pago igual al precio de la acción en ese momento, o el precio de la opción en el periodo anterior (el que sea mayor). Después de tres periodos la opción expira. El precio actual de la acción de la empresa ABC es 400 ptas. y durante cada periodo el precio aumentará o disminuirá en un 50%. La acción no paga dividendos y el tipo de interés es de 10% por año.

Solución. La evolución del precio de la acción es:



u = 1,5; d = 0,5; r = 1,1. p = (r-d)/(u-d) = 0,6.

Como esta opción depende del camino recorrido, es interesante ver que, por ejemplo, al valor de 300 en t=2 se puede llegar bajando desde 600 (en t=1) o subiendo desde 200. Por esta razón, desdoblamos el árbol binomial:



El valor de la opción especial en cada periodo t es C_t = MAX (S_t ; C_{t-1}). El valor de esta opción especial en algunos de los nudos del árbol binomial es:

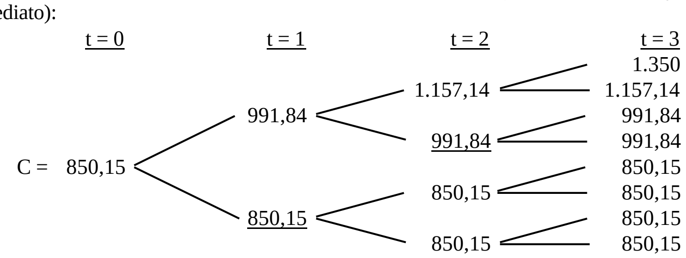
C_{1350} = MAX (1350 ; C_{900}) = MAX [1350; (0,6xC_{1350}+0,4xC_{450})/1,1]

C_{900} = MAX [900; C_{600}; (0,6xC_{1350}+0,4xC_{450})/1,1]

C_{600} = MAX [600; C_{400}; (0,6xC_{900}+0,4xC_{300})/1,1]

C_{400} = (0,6xC_{600}+0,4xC_{200})/1,1

Resolviendo todas las ecuaciones de los nudos resulta (los números subrayados significan ejercicio inmediato):



El valor de la opción especial es **850,146 pesetas**. Si la opción especial no se pudiera ejercer en cada periodo, sino sólo en el último, su valor sería 514,29 pesetas como se detalla a continuación:

t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
			1.350
		1.157,14	1.157,14
	771,43		450,00
		385,71	385,71
Ce = 514,29			450,00
		385,71	385,71
	257,14		150,00
		128,57	128,57

4.7. Opciones cuyo precio de ejercicio es el subyacente antes del ejercicio.

El valor en la fecha de ejercicio (z) de una opción que proporciona a su poseedor el derecho a comprar una acción pagando una cantidad igual al precio de la acción en t (t<z) es:

$MAX(S_z - S_t; 0)$

El valor de esta opción hoy (T=0) es:

$Call_{Sz\text{ - }St} = VAN_Q [E_Q\{ MAX(S_z - S_t; 0) \}] = VAN_Q [E_Q\{S_z - S_t / S_z > S_t \}]$

Un poco de álgebra permite comprobar que:

$$\mathbf{Call_{Sz\text{ - }St} = S\ N(x) - S\ r^{-(z-t)}\ N(x - s\ v(z-t))} \qquad \mathbf{(4.27)}$$

$$\mathbf{x = v(z-t)\ [Ln\ (r) + s^2/2]\ /\ s} \qquad \mathbf{(4.28)}$$

La figura 4.15 muestra el valor de una call cuyo precio de ejercicio es el valor del subyacente en un determinado momento antes del ejercicio. Como se observa, a menudo que se aleja en el tiempo ese momento, el valor de la call disminuye.

La figura 4.16 muestra cómo afecta el tiempo que queda hasta el ejercicio al valor de la call exótica. Nótese que a medida que aumenta el tiempo hasta el vencimiento, aumenta también el valor de la opción.

En cuanto a la volatilidad, la figura 4.17 muestra que un incremento en ésta se traduce en un mayor valor de la opción.

En la figura 4.18 se observa cómo afecta el tipo de interés al valor de una call con precio de ejercicio igual al precio del subyacente en una fecha anterior al ejercicio. A medida que aumenta el tipo de interés, mayor es el valor de la opción exótica.

Figura 4.15.Opciones cuyo precio de ejercicio es el subyacente antes del ejercicio.
z = 1 año; s = 40%; r = 1,1

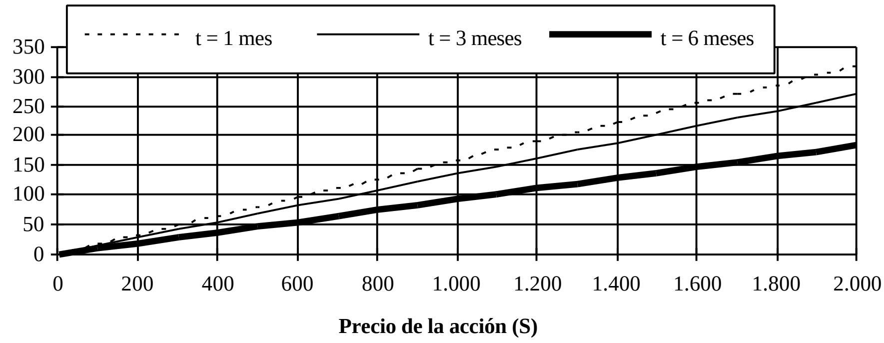


Figura 4.16.Opciones cuyo precio de ejercicio es el subyacente antes del ejercicio.
S = 1.000; s = 40%; r = 1,1

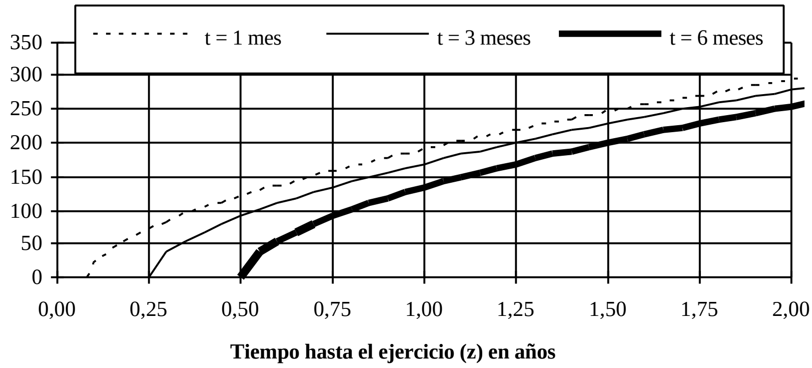


Figura 4.17.Opciones cuyo precio de ejercicio es el subyacente antes del ejercicio.
S = 1.000; r = 1,1; z = 1 año

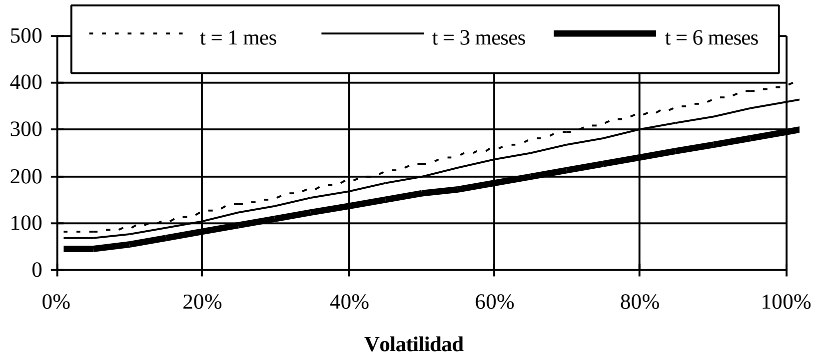
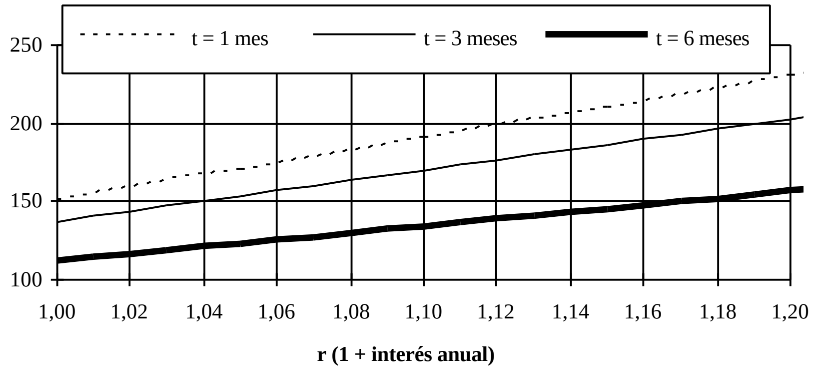


Figura 4.18.Opciones cuyo precio de ejercicio es el subyacente antes del ejercicio.
S = 1.000; s = 40%; z = 1 año



4.8. Opciones "Boom" y "Crash".

Estas opciones tienen como precio de ejercicio una rentabilidad (por ejemplo, la rentabilidad de un índice). Por eso, se necesita un valor nocional (VN) que proporcione el valor en pesetas de la opción.

El valor de una opción "Boom" en la fecha de ejercicio (t) es:

Opción_{BOOM} = VN x MAX [MAX {r_1, r_2, r_3, r_4, ..., r_t} - k; 0]. (4.29)

r_1, r_2, r_3, r_4, ..., r_t son las rentabilidades del activo subyacente durante los periodos (días, semanas, ... según se defina la opción) de vigencia de la opción. k es el precio de ejercicio, que en estas opciones es una rentabilidad.

El valor de una opción "Crash" en la fecha de ejercicio (t) es:

Opción_{CRASH} =VN x MAX [k - MIN {r_1, r_2, r_3, r_4, ..., r_t}; 0]. (4.30)

r_1, r_2, r_3, r_4, ..., r_t son las rentabilidades del activo subyacente durante los periodos (días, semanas, ... según se defina la opción) de vigencia de la opción. k es el precio de ejercicio, que en estas opciones es una rentabilidad.

El método de valoración de estas opciones más fácil es el de las martingalas. Por ejemplo, el valor de una opción "Boom" en el momento de su creación (t = 0) es:

VAN_Q [E_Q{VN x MAX [MAX {r_1, r_2, r_3, r_4, ..., r_t} - k; 0]}] =

= r^{-t} VN E_Q{ MAX [MAX {r_1, r_2, r_3, r_4, ..., r_t} - k; 0]}.

El arículo de Longin (1995) proporciona una guía para la valoración de estas opciones y su replicación.

5. Opciones sobre opciones

Con frecuencia se denominan también **opciones compuestas**[14].

5.1. Call sobre call

Una call sobre una call se puede valorar utilizando el método binomial.

Ejemplo. La cotización actual de una acción de la empresa AAA es 1.000 ptas. En cada periodo la cotización aumentará en 100% ó disminuirá en un 50%. La acción no paga dividendos y la tasa de interés sin riesgo es 10% en cada periodo.

Suponer que se negocia una opción de compra Europea sobre la acción de la empresa AAA con dos periodos hasta el vencimiento y con un precio de ejercicio de 800 ptas. Considerar ahora una opción de compra Europea con un periodo sobre la opción de compra Europea con dos periodos. Esta segunda opción comprada da a su poseedor el derecho a comprar la primera opción por un precio de ejercicio de 400 ptas. ¿Cuál es el valor correcto de esta opción de compra con un periodo?

***Solución*.**

S = 1.000 → 2.000 → 4.000 ; 1.000
S = 1.000 → 500 → 1.000 ; 250

$u = 2$
$d = 0,5$
$p = \dfrac{1,1 - 0,5}{2 - 0,5} = 0,4$

Ce = 502,48 → 1.272,$\overline{72}$ → 3.200 ; 200
Ce = 502,48 → 72,$\overline{72}$ → 200 ; 0

K = 80

Cc = 317,355 → 872,$\overline{72}$; 0

K= 400

Call sobre la Ce

Cc = (872,72 x 0,4) / 1,1 = **317,355 pesetas.**

Notar que aplicamos la "P" que resulta del movimiento de la acción (sin ninguna transformación), pues es el precio que determina el valor de la opción y el de la opción sobre la opción. Dado el movimiento de la acción:

S → u S ; d S

formamos una cartera réplica con los mismos cash-flows que la opción sobre la opción,

[14] Ver, por ejemplo, Lamothe (1993), páginas 256-259, y Cox y Rubinstein (1985), páginas 412-415.

$^2uS + Br = Cu = 872,\overline{72}$

$^2 S + B$

$^2dS + Br = Cd = 0$

$^2 = \dfrac{C_u - C_d}{(u - d)\,S} = \dfrac{872,\overline{72}}{1,5 \times 1.000} = 0,5\overline{81}$

$B = \dfrac{u\,C_d - d\,C_u}{(u - d)\,r} = \dfrac{-0,5 \times 872,\overline{72}}{1,5 \times 1,1} = -264,4628$

$872,\overline{72}$

0

317,355 = 0,581 x 1.000 - 264,4628

También podemos replicar la opción sobre la opción con ? $_o$ opciones sobre la acción y B' pesetas en bonos.

$1272,\overline{72}$

$72,\overline{72}$

Ce = 502,48

u' = 2,53; d' = 0,14; r = 1,1; p' = 0,4

$^2{}_0 = \dfrac{872,\overline{72}}{(u' - d') \times 502,48} = 0,\overline{72}$ opciones sobre la acción

$B'' = \dfrac{-d' \times 872,\overline{72}}{(u' - d') \times r} = -48,084$ ptas.

$872,\overline{72}$

0

$317,355 = 0,\overline{72} \times 502,48 - 48,084$

La expresión del valor de una call europea (con precio de ejercicio K y tiempo hasta el ejercicio t) sobre una call sobre una acción (con precio de ejercicio X y tiempo hasta el ejercicio t + T) viene dada por[15]:

$\mathrm{Call}_{call} = S\, N_2 (x_1, y_1, v[t/(t+T)]) - K\, r^{-t}\, N (y_2)$

$\quad - X\, r^{-(t+T)}\, N_2 (x_2, y_2, v[t/(t+T)]),$ (5.1)

donde:

$x_1 = [\, Ln (S /X) + (ln(r) +0,5\sigma^2) (t+T)] / (\sigma\, v[t+T]);$ (5.2)

$x_2 = x_1 - \sigma\, v[t+T]$ (5.3)

$y_1 = [\, Ln (S /S_{Kt}) + (ln(r) +0,5\sigma^2)\, t] / (\sigma\, vt);$ (5.4)

$y_2 = y_1 - \sigma\, vt$ (5.5)

S_{Kt} = valor de la acción en t que hace que la call con precio de ejercicio X tenga un valor K en t. N_2 (a, b, ρ) es la probabilidad acumulada de la distribución normal bivariante con límite superior a para la primera variable, b para la segunda y correlación ρ entre ambas variables. El término $N_2 (x_1, y_1, v[t/(t+T)])$ es la delta de la call sobre la call. $N (y_2)$ es la probabilidad de que S_t sea superior a S_{Kt}. $N_2 (x_2, y_2, v[t/(t+T)])$ es la probabilidad de que S_t sea superior a S_{Kt} en t y a X en t+T.

Se deja como ejercicio para el lector comprobar que si T=t (entonces S_{Kt} =K+X) y K = 0, la call sobre una call se convierte en una call europea ordinaria[16].

5.2. Put sobre call

El valor de una put europea sobre una call sobre una acción es:

$\mathrm{Put}_{call} = X\, r^{-(t+T)}\, N_2 (x_2, -y_2, -v[t/(t+T)])$

[15] Stoll y Whaley (1993) derivan en la página 395 la fórmula para valorar una call sobre una call de un modo muy asequible.

[16] Es útil saber que $N_2 (x, x, 1) = N (x)$

$-S\ N_2\ (x_1, -y_1, -\sqrt{t/(t+T)}) + K\ r^{-t}\ N\ (-y_2)$ (5.6)

5.3. Call sobre put

La expresión del valor de una call europea (con precio de ejercicio K y tiempo hasta el ejercicio t) sobre una put sobre una acción (con precio de ejercicio X y tiempo hasta el ejercicio t + T) viene dada por:

$$Call_{put} = -S\ N_2\ (-x_1, -y_1, \sqrt{t/(t+T)}) - K\ r^{-t}\ N\ (-y_2) + X\ r^{-(t+T)}\ N_2\ (-x_2, -y_2, \sqrt{t/(t+T)}), \quad (5.7)$$

donde:

S_{Kt} = valor de la acción en t que hace que la put con precio de ejercicio X tenga un valor K en t.

Ejemplo. Considerar una call con tres meses hasta el ejercicio y precio de ejercicio 100 pesetas sobre una put sobre el IBEX con nueve meses hasta el ejercicio y precio de ejercicio 4.000 pesetas. Cada punto del IBEX se considera una peseta. El IBEX hoy es 3.900 puntos. Los dividendos anuales del IBEX se estiman en 4,08% del índice, la volatilidad esperada es 28% y la tasa de interés sin riesgo es 7,25%.

S_{Kt} resulta 4.612 pesetas. El valor de la call sobre la put resulta 280 pesetas. El valor de una call sobre una call con idénticos parámetros que la put resulta 273 pesetas[17].

5.4. Put sobre put

El valor de una put europea sobre una put sobre una acción es:

$$Put_{put} = S\ N_2\ (-x_1, y_1, -\sqrt{t/(t+T)}) - X\ r^{-(t+T)}\ N_2\ (-x_2, y_2, -\sqrt{t/(t+T)}) + K\ r^{-t}\ N\ (y_2) \quad (5.8)$$

5.5. Call sobre call o put *(chooser option)*

Es una opción que da derecho a tener en la fecha de ejercicio una call o una put. Suponer una *chooser option* con fecha de ejercicio en t. En t, el poseedor de la opción podrá elegir entre una call ordinaria con precio de ejercicio K_1 y fecha de ejercicio t_1 o entre una put ordinaria con precio de ejercicio K_2 y fecha de ejercicio t_2. Lógicamente, t_1 y t_2 son mayores que t. El valor de la *chooser option* en la fecha de ejercicio t es:

$Call_{chooser}$ = MAX [Call (S_t; K_1; t_1-t); Put (S_t; K_2; t_2-t)]

En el caso más sencillo en que $t_1 = t_2$ y $K_1 = K_2$, utilizando la put-call parity (suponiendo que no hay dividendos), sabemos que: Call (S_t; K_1; t_1-t)+ K_1 r^{t1-t} - S_t = Put (S_t; K_1; t_1-t).

Por consiguiente, el valor de esta *chooser option* en la fecha de ejercicio t es:

MAX [Call (S_t; K_1; t_1-t); Put (S_t; K_1; t_1-t)] =

= MAX [Call (S_t; K_1; t_1-t); Call (S_t; K_1; t_1-t)+ K_1 r^{t1-t} - S_t] =

= Call (S_t; K_1; t_1-t) + MAX [0 ; K_1 r^{t1-t} - S_t].

Y el valor de esta *chooser option* hoy es:

$Call_{chooser}$ = Call (S_t; K_1; t_1) + Put (S_t; K_1 r^{t1-t}; t)

[17] Estas valoraciones pueden realizarse también por simulación. Se puede simular la trayectoria del IBEX los primeros 3 meses y valorar entonces por una fórmula estándar (Black-Scholes, binomial) la opción con precio de ejercicio 4.000 con 6 meses hasta el ejercicio. No se pueden valorar ambas opciones simulando la trayectoria del IBEX los nueve meses (si se hace esto se sobrevaloran las opciones). Tampoco sería correcto valorar este instrumento con simulación si fuese una put americana sobre una put o sobre una call, por la imposibilidad de valorar puts americanas mediante simulación.

Luego el valor de la *chooser option* hoy es la suma de una call ordinaria con fecha de ejercicio en t_1 y una put ordinaria con fecha de ejercicio en t y precio de ejercicio $K_1\ r^{t1-t}$.

Para valorar la *chooser option* en un caso general, necesitamos saber el valor de la acción S_t* por encima del cual tendrá más valor la call y por debajo del cual tendrá más valor la put. Call (S_t*; K_1; t_1-t) = Put (S_t*; K_2; t_2-t). Una vez determinado el valor S_t*, podemos escribir el valor de la *chooser option* en t como:

MAX [Call (S_t; K_1; t_1-t); Put (S_t; K_2; t_2-t)] =

Call (S_t; K_1; t_1-t)	si $S_t > S_t$*;		0	si $S_t > S_t$*
		+		
0	si $S_t < S_t$*;		Put (S_t; K_2; t_2-t)	si $S_t < S_t$*

Por consiguiente, el valor hoy de la *chooser option* hoy es la suma de una call sobre una call y una call sobre una put, ambas con precio de ejercicio cero.

$$Call_{chooser} = S\ N_2\ (x_1,\ y_1,\ v[t/t_1])\ -\ K_1\ r^{-t1}\ N_2\ (x_1 -\ \sigma\ vt_1,\ y_1 -\ \sigma\ vt,\ v[t/t_1])\ -$$
$$-\ S\ N_2\ (-x_2,\ -y_2,\ v[t/t_2])\ +\ K_2\ r^{-t2}\ N_2\ (-\ x_2 +\ \sigma\ vt_2,\ -y_2 +\ \sigma\ vt,\ v[t/t_2]), \qquad (5.9)$$

donde:

$$x_1 = [\ Ln\ (S\ /K_1) + (ln(r)\ +0{,}5\sigma^2)\ t_1]\ /\ (\sigma\ vt_1); \qquad (5.10)$$
$$y_1 = y_2 = [\ Ln\ (S\ /S_t{*}) + (ln(r)\ +0{,}5\sigma^2)\ t]\ /\ (\sigma\ vt); \qquad (5.11)$$
$$x_2 = [\ Ln\ (S\ /K_2) + (ln(r)\ +0{,}5\sigma^2)\ (t_2)]\ /\ (\sigma\ vt_2); \qquad (5.12)$$

6. Opciones que dependen de varios subyacentes

6.1. Opción de cambiar un activo por otro[18]

Call. Valor en la fecha de ejercicio: Max (0; S_t - W_t).

Valor de la opción europea antes del ejercicio:

$$Call_{cambio} = S\ N\ (x) - W\ N\ (x - \sigma\ vt) \qquad (6.1)$$
$$x = [\ Ln\ (S\ /W) + 0{,}5\ \sigma^2\ t]\ /\ (\sigma\ vt)\ ; \qquad (6.2)$$
$$\sigma^2 = \sigma_s^2 + \sigma_w^2 - 2\ \rho_{sw}\ \sigma_s\ \sigma_w \qquad (6.3)$$

El derecho a comprar S pagando W tiene el mismo valor que el derecho a vender W a cambio de S.

La figura 6.1 muestra cómo estas opciones (cuando la volatilidad de ambos activos es igual) tienen más valor cuanto menor es la correlación entre ambos y cuanto mayor es la volatilidad. La figura 6.2 muestra cómo cambia el valor de estas opciones (cuando la volatilidad de uno de los activos es 30%) cuando aumenta la volatilidad de uno de los activos. Es interesante observar que cuando la correlación es muy elevada, la opción disminuye de valor cuando aumenta la volatilidad del activo hasta llegar a igualar a la volatilidad del otro. En el caso de que la correlación es 1, la opción no vale nada[19]. Es interesante observar

[18] Es igual a una call en que el precio de ejercicio es el valor de otro activo.

[19] Dos activos con igual volatilidad y correlación =1 son idénticos, y lógicamente, la opción de cambiar uno por otro no vale nada.

también que cuando la volatilidad de uno de los activos es cero, el valor de la opción de cambiar un activo por otro es independiente de la correlación[20].

Figura 6.1. Opción de cambiar un activo por otro en función de la correlación entre ambos. S = W= 1.000 pesetas; t = 1 año; $s_S = s_W = s$

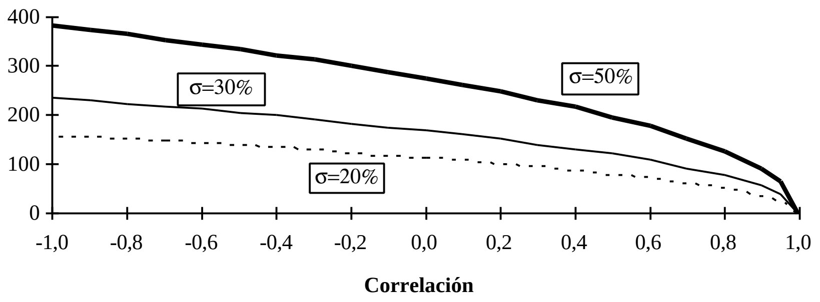
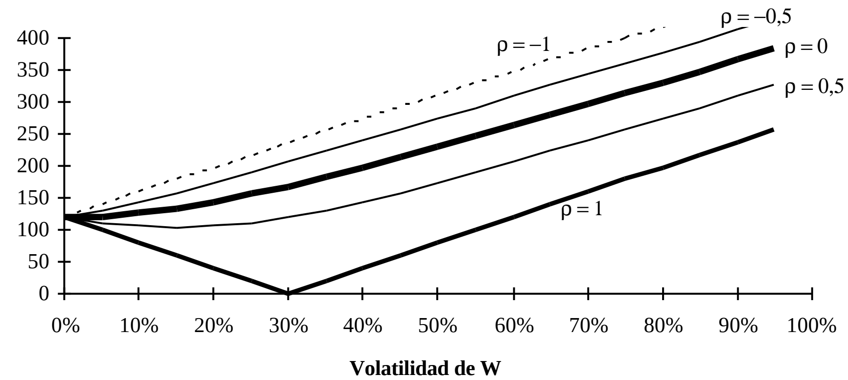


Figura 6.2. Opción de cambiar un activo por otro en función de la volatilidad de uno de ellos (s_W**) y de la correlación entre ambos. S = W= 1.000 pesetas; t = 1 año;** s_S **= 30%.**



6.2. Opciones sobre el mejor o el peor de dos precios *(options on the maximum/minimum)*

El valor de estas opciones en la fecha de ejercicio es:

Call sobre el máximo: Max (0; Max (S_t , W_t) - K).

Call sobre el mínimo: Max (0; Min (S_t , W_t) - K)

Put sobre el mínimo: Max (0; K - Min (S_t , W_t)).

Put sobre el máximo: Max (0; K - Max (S_t , W_t)).

---

[20] Ver que si $\sigma_W = 0$, entonces $\sigma = \sigma_S$; $x = [\text{Ln}(S/W) + 0{,}5\, \sigma_S^2\, t] / (\sigma_S \text{ vt})$. El valor que resulta es el de una call sobre la acción S con precio de ejercicio W $(1+\sigma_S)^t$ (considerando el tipo de interés $r = 1+\sigma_S$). Véase que este resultado extremo es ilógico pues equipara la volatilidad al tipo de interés.

La expresión que proporciona el valor de una call europea[21] sobre el máximo de dos acciones, W y S (que no reparten dividendos), con precio de ejercicio K es:

$Call_{máx} = S\ N_2\ (x_1, x'_1, \rho_1) + W\ N_2\ (y_1, x'_2, \rho_2)$

$- K\ r^{-t}\ [\ 1- N_2\ (-x_2, -y_2, \rho_{sw})]$ (6.4)

donde:

$x_1 = [\ Ln\ (S\ /K) + (ln(r) + 0{,}5\sigma_s^2)\ t]\ /\ (\sigma_x\ vt);$ (6.5)

$x_2 = x_1 - \sigma_s\ vt$ (6.6)

$y_1 = [\ Ln\ (W\ /K) + (ln(r) + 0{,}5\sigma_w^2)\ t]\ /\ (\sigma_w\ vt);$ (6.7)

$y_2 = y_1 - \sigma_w\ vt$ (6.8)

$x'_1 = [\ Ln\ (S\ /W) + 0{,}5\sigma^2\ t]\ /\ (\sigma\ vt);$ (6.9)

$x'_2 = -x_1 + \sigma\ vt$ (6.10)

$\sigma^2 = \sigma_s^2 + \sigma_w^2 - 2\ \rho_{sw}\ \sigma_s\ \sigma_w.$ (6.11)

$\rho_1 = (\sigma_s - \rho_{sw}\sigma_w)\ /\ \sigma\ ;$ (6.12)

$\rho_2 = (\sigma_w - \rho_{sw}\sigma_s)\ /\ \sigma\ ;$ (6.13)

$[1- N_2\ (-x_2, -y_2, \rho_{sw})]$ es la probabilidad de que una de las dos acciones supere el precio de ejercicio K.

La expresión que proporciona el valor de una call europea sobre el mínimo de dos acciones, W y S (que no reparten dividendos), con precio de ejercicio K es:

$Call_{min} = S\ N_2\ (x_1, -x'_1, -\rho_1) + W\ N_2\ (y_1, -x'_2, -\rho_2)$

$- K\ r^{-t}\ N_2\ (x_2, y_2, \rho_{xw})]$ (6.4)

Una call sobre el máximo de dos precios con precio de ejercicio K es equivalente a una call sobre el primero más una call sobre el segundo menos una call sobre el mínimo de los dos precios, todas con precio de ejercicio K. En efecto, en la fecha de ejercicio:

$Call_{max} + Call_{min} = Max\ (0; Max\ (S_t\ , W_t) - K) + Max\ (0; Min\ (S_t\ , W_t) - K) =$

si $S_t > W_t$: $Max\ (0; S_t - K) + Max\ (0; W_t - K) = Call\ (S) + Call\ (W)$

si $S_t < W_t$: $Max\ (0; W_t - K) + Max\ (0; S_t - K) = Call\ (S) + Call\ (W).$

por consiguiente:

$\mathbf{Call_{max} + Call_{min} = Call\ (S) + Call\ (W)}$

Una put sobre el mínimo de dos precios con precio de ejercicio K es equivalente al valor actual de K, más una call sobre el mínimo de los dos precios con precio de ejercicio K, menos una call sobre el mínimo de los dos precios con precio de ejercicio 0. En efecto, en la fecha de ejercicio:

$\mathbf{Put_{min} - Call_{min}} = Max\ (0; K - Min\ (S_t\ , W_t)) - Max\ (0; Min\ (S_t\ , W_t) - K) =$

si $Min\ (S_t\ , W_t) > K$: $- Min\ (S_t\ , W_t) + K$

si $Min\ (S_t\ , W_t) < K$: $K - Min\ (S_t\ , W_t))$

por consiguiente,

en la fecha de ejercicio: $\mathbf{Put_{min} - Call_{min} = K - Min\ (S_t\ , W_t))}$

[21] Sobre el ejercicio anticipado de puts sobre el mínimo de dos acciones, ver el artículo de Tan y Vetzal, "Early Exercise Regions for Exotic Options" (1995).

Una put sobre el máximo de dos precios con precio de ejercicio K es equivalente al valor actual de K, más una call sobre el máximo de los dos precios con precio de ejercicio K, menos una call sobre el máximo de los dos precios con precio de ejercicio 0. En efecto, en la fecha de ejercicio:

$\mathbf{Put_{max} - Call_{max} =}$ Max (0; K - Max (S_t , W_t)) - Max (0; Max (S_t , W_t) - K)

si Max (S_t , W_t) > K : - Max (S_t , W_t) + K

si Max (S_t , W_t) < K : K - Max (S_t , W_t))

por consiguiente,

en la fecha de ejercicio: $\mathbf{Put_{max} - Call_{max} = K - Max (S_t , W_t))}$

Una put sobre el máximo de dos precios con precio de ejercicio K es equivalente a una put sobre el primero más una put sobre el segundo menos una put sobre el mínimo de los dos precios, todas con precio de ejercicio K. En efecto, en la fecha de ejercicio:

$Put_{max} + Put_{min}$ = Max (0; K - Min (S_t , W_t)) + Max (0; K - Max (S_t , W_t)) =

si $S_t > W_t$: Max (0; K - W_t) + Max (0; K -S_t) = Put (S) + Put (W)

si $S_t < W_t$: Max (0; K - S_t) + Max (0; K - W_t)= Put (S) + Put (W).

por consiguiente:

$\mathbf{Put_{max} + Put_{min} = Put (S) + Put (W)}$

Una call sobre el máximo de los dos precios con precio de ejercicio 0 es equivalente a una de las acciones más una opción de cambiar un activo por otro. En efecto, en la fecha de ejercicio:

Max (S_t , W_t) = W_t + Max (S_t - W_t, 0) = S_t + Max (0, W_t - S_t)

El lector interesado en profundizar en estas opciones puede consultar el artículo de Stulz (1982) titulado “Options on the Minimum or the Maximum of Two Risky Assets: Analysis and Aplications".

6.3. Opciones sobre el producto de dos precios

El valor en la fecha de ejercicio de estas opciones es:

Call: Max (0; S_t x W_t - K)

Put: Max (0; K - S_t x W_t)

Estas opciones se utilizan con mucha frecuencia. Por ejemplo, una opción sobre una acción americana con el precio de ejercicio expresado en pesetas. Estas opciones se suelen valorar considerando que el producto (S_t x W_t) es una variable con distribución lognormal.

7. Otras opciones exóticas

Existen muchos otros tipos de opciones exóticas. Por ejemplo, las opciones con inicio diferido (se compran antes de que el contrato comience), las opciones americanas con pago diferido (aunque se pueden ejercer antes del vencimiento, no se recibe ningún flujo hasta el vencimiento), las opciones apalancadas[22], opciones exponenciales[23],...

8. Forwards exóticos

[22] El valor de una call apalancada en la fecha de ejercicio es MAX (pS - K; 0), siendo p una constante.

[23] El valor de una call exponencial en la fecha de ejercicio es MAX ($[S - K]^2$; 0).

8.1. Forward prorrogable

El forward prorrogable es un contrato forward a año sobre una acción de la empresa ABC que tiene la característica especial de que se puede prorrogar otro año, si el poseedor del contrato forward así lo quiere. En otras palabras, dentro de un año el poseedor del contrato puede comprar una acción por el precio forward o esperar a comprar la acción un año más tarde, por el precio forward también. Al igual que en el contrato forward ordinario, no hay ningún flujo de dinero hoy, al formalizar el contrato.

El precio de la acción de la empresa ABC es 500 ptas. Dentro de seis meses la empresa distribuirá un dividendo a sus accionistas igual al 20% de la cotización de la acción en ese momento. Como resultado se espera que el precio de la acción caiga un 20% al día siguiente del pago del dividendo. Dentro de año y medio la compañía pagará de nuevo un dividendo igual al 20% del valor de la acción en dicho momento. Durante los dos próximos años, no habrá otros dividendos aparte de los indicados. La tasa de interés es constante e igual a 10% cada año.

¿Qué precio debe tener este contrato forward extendible si:

- la volatilidad anual prevista de la acción es el 15%?
- la volatilidad anual prevista de la acción es el 100%?

Valoración del forward prorrogable

F es el precio del contrato forward extendible. Dentro de doce meses, el poseedor del contrato deberá decidir entre ejercerlo entonces o esperar un año. Si lo ejerce, obtendrá S_{12} - F en el mes 12, siendo S_{12} la cotización de la acción en el mes 12. Si decide no ejercerlo, obtendrá S_{24} - F en el mes 24, siendo S_{24} la cotización de la acción en el mes 24. Por consiguiente, el valor del contrato en el mes 12 será:

$$\text{MAX}\ [\ S_{12} - F\ ,\ \text{VAN}(\ S_{24} - F\ )\ ] = \text{MAX}\ [\ S_{12} - F\ ,\ 0{,}8\ S_{12} - F/1{,}1\ ] =$$
$$= 0{,}8\ S_{12} - F/1{,}1 + 0{,}2\ \text{MAX}\ [\ S_{12} - 0{,}45454545\ F\ ,\ 0\ ]. \qquad \textbf{(8.1)}$$

Este es el valor del contrato en el mes 12. El valor del contrato hoy es cero, puesto que no hay ningún flujo de dinero entre comprador y vendedor. Luego[24] VAN[(1)]=0.

$$0 = 320 - F\ /\ 1{,}21 + 0{,}2\ \text{Call}\ (1 \text{ acción de ABC},\ t = 1 \text{ año},\ K = 0{,}4545\ F\ ) \qquad \textbf{(8.2)}$$

La resolución de la ecuación (8.2) proporciona el valor de F.

Si σ = 0,15, entonces F = 440 pesetas. Nótese que 440 es el precio forward de un contrato normal a un año. Esto significa que si la volatilidad es pequeña, el valor de la opción de prorrogar el contrato hasta el mes 24 es nulo.

Si σ = 1, entonces F = 447,01 pesetas, mayor que 440 (el precio forward de un contrato normal a un año). Esto significa que si la volatilidad es mayor, el valor de la opción de extender el contrato hasta el mes 24 tiene valor.

Otro modo de valorar el forward prorrogable

Podemos escribir [1] de otro modo:

$$\text{MAX}\ [\ S_{12} - F\ ,\ 0{,}8\ S_{12} - F/1{,}1\ ] =$$
$$= S_{12} - F + 0{,}2\ \text{MAX}\ [\ 0\ ,\ 0{,}45454545\ F - S_{12}\ ] \qquad \textbf{(8.3)}$$

[24] Como el dividendo en el mes 6 será el 20% de la cotización, VAN (S_{12}) = 0,8 S_0 = 400 pts.

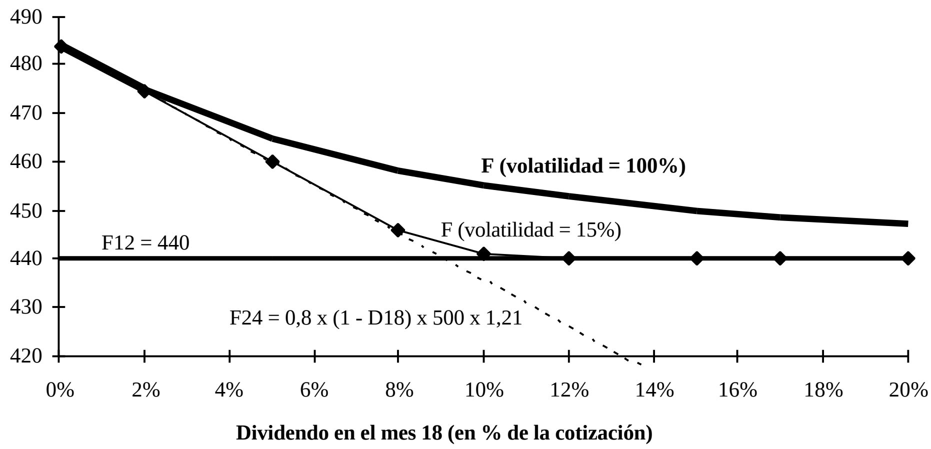
VAN [(3)] = 0. Luego

0 = 400 - F / 1,1 + 0,2 Put (1 acción de ABC, t = 1 año , K = 0,4545 F) **(8.4)**

La resolución de (8.4) proporciona el mismo resultado que la resolución de (2). De hecho, el lector puede comprobar que una ecuación se obtiene a partir de la otra por la put-call parity. Tanto la put como la call que aparecen en estas fórmulas son europeas.

La figura 8.1 muestra el precio forward en función de los dividendos que reparta la acción en el mes 18. F_{12} es el precio de un contrato forward que se ejercerá en el mes 12. F_{12} = (1- D_6) x S_0 x r = 0,8 x 500 x 1,1 = 440 pesetas. F_{24} es el precio de un contrato forward que se ejercerá en el mes 24. F_{24} = 0,8 x (1 - D_{18}) x 500 x 1,21, siendo D_{18} los dividendos que se repartirán en el mes 18. Nótese la influencia de la volatilidad. Para una volatilidad del 15%, la figura 8.1 permite observar que si el dividendo del mes 18 es pequeño (menor del 9% de la cotización), el forward prorrogable es idéntico a un forward ordinario a 24 meses. Si el dividendo del mes 18 es superior al 9% de la cotización, el forward prorrogable es idéntico a un forward ordinario a 12 meses. Para una volatilidad de 100%, el precio del forward prorrogable difiere mucho más de los precios forward ordinarios. Nótese que F_{12} = F_{24} para D18 = 9,0909%.

Figura 8.1. Valoración del forward prorrogable
S = 500; r = 1,1; D6 = 20%



Valoración del forward prorrogable a partir de opciones negociadas

Supongamos ahora que no tenemos idea sobre la volatilidad esperada de la acción ABC, pero en el mercado se negocian call europeas sobre la acción de la empresa ABC con un año hasta la fecha de ejercicio a los siguientes precios:

Precio de ejercicio	Call (pesetas)
180	236,39
200	218,18
220	200,30
240	182,52

Es inmediato comprobar que de las cuatro opciones, sólo la de K = 200 cumple la ecuación [2]. Por consiguiente, F = 200 / 0,45454545 = 440 pesetas.

8.2. Contrato forward flexible

El contrato forward flexible se ejercerá dentro de un año. El vendedor del contrato podrá entonces entregar una o dos acciones de la empresa ZZZ, o bien uno o dos bonos cupón cero. En ese momento el comprador del contrato estará obligado a comprar la combinación escogida por el vendedor a un precio por unidad igual al precio forward que existía cuando se originó el contrato. ¿Cuál es el precio forward correcto para este contrato?

El precio actual de una acción de ZZZ es 1.000 ptas. El precio actual de un bono cupón cero de valor nominal 1.000 ptas. con un año hasta su amortización es de 900 ptas. Existe un mercado de opciones europeas sobre una acción y con un año hasta la fecha de ejercicio. Los precios a los que se negocian en el mercado son los siguientes:

Precio de ejercicio	Call	Put
900	120	30
1.000	60	60
1.100	30	120

Análisis gráfico del forward flexible. La figura 8.2 muestra el análisis gráfico de este instrumento. Dentro de un año, el vendedor entregará la combinación que resulte más beneficiosa para él. Si F es el precio del contrato (que se fija hoy) y S* es el precio de la acción de la empresa ZZZ dentro de un año, los flujos entre los que puede escoger el vendedor del contrato son:

- F - S*. Entregar una acción.
- 2F - 2S*. Entregar dos acciones.
- F - 1.000. Entregar un bono.
- 2F - 2.000. Entregar dos bonos.

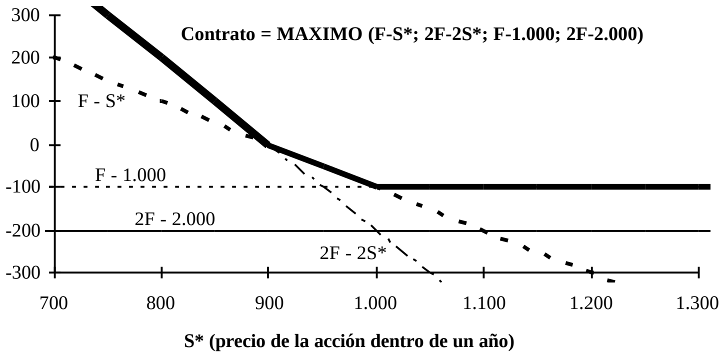
Lógicamente, el vendedor escogerá (en función de cual sea S*) la combinación que le resulte más beneficiosa, que es la que se indica en la figura 8.2. Analizando la figura 8.2 con un poco de atención, se observa que el contrato para el vendedor es equivalente a comprar 2 puts con precio de ejercicio F, a vender una call con precio de ejercicio F y a comprar una call at the money (con precio de ejercicio 1.000). Por consiguiente:

2 Put (K = F) - Call (K = F) + Call (K = 1.000) =0.

Esta ecuación se cumple con las opciones de precio de ejercicio 900, luego:

F = 900 pesetas.

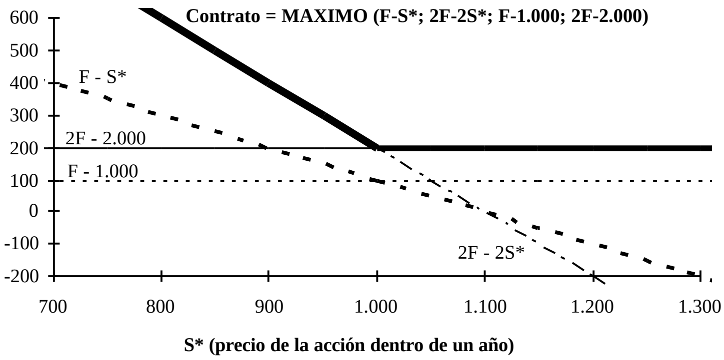
Figura 8.2. Valor del forward flexible en la fecha de vencimiento (suponiendo que F < 1.000)



El lector puede comprobar que la volatilidad implícita de las opciones con precio de ejercicio 900 es 19,22%, la de las de precio de ejercicio 1.000 es 16,73% y la de las de precio de ejercicio 1.100 es 17,38%. El que la put y la call de precio de ejercicio 1.000 tengan el mismo precio permite concluir que el precio forward de un contrato ordinario es 1.000 pesetas y que el valor actual de los dividendos que el mercado espera que reparta la acción durante el próximo año es 100 pesetas.

La figura 8.3 es la correspondiente a la 8.2 si se hubiera supuesto F > 1.000. Nótese que en esa situación, el valor del forward flexible en la fecha de vencimiento siempre sería mayor que cero, lo que es incompatible con que el valor del contrato hoy sea cero (no hay flujos de dinero entre comprador y vendedor al iniciarse el contrato).

Figura 8.3. Valor del forward flexible en la fecha de vencimiento (suponiendo que F > 1.000)

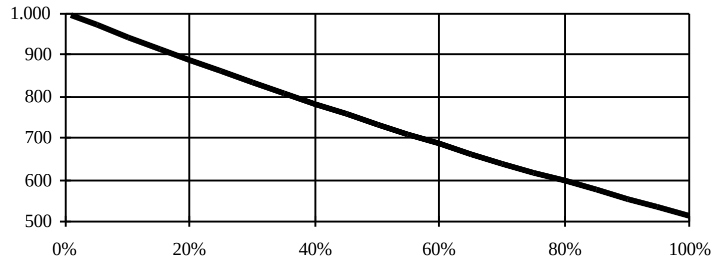


Resolución analítica del forward flexible

El valor del contrato para el vendedor dentro de un año es:
MAX (F - S* ; 2F - 2S*; F - 1.000; 2F - 2.000). Si F < 1.000, F - 1.000 > 2F - 2.000.
Por consiguiente, el valor del contrato para el vendedor dentro de un año es:
MAX (F - S* ; 2F-2S*; F-1.000) = F-1.000 + MAX (1.000-S* ; F-S* + 1.000-S*; 0).

Como MAX (3; 4 + 3; 0) = MAX (3; 0) + MAX (4 ; 0), podemos reescribir el valor del contrato para el vendedor dentro de un año como: F-1.000 + MAX (1.000-S* ; 0) + MAX (F-S*; 0). El valor del contrato hoy es nulo, al no haber ningún flujo entre comprador y vendedor. Por consiguiente:
(F-1.000) /r + Put (K = 1.000) + Put (K = F) = 0. De nuevo, comprobamos que la put con precio de ejercicio cumple la condición: (900-1.000) /(10/9) + 60 + 30 = 0. Luego el precio correcto de este contrato es **900 pesetas.** Es interesante comprobar (por la put-call parity) que:
(F-1.000) /r + Put (K = 1.000) + Put (K = F) = 2 Put (K = F) - Call (K = F) + Call (K = 1.000).

Figura 8.4. Precio del forward flexible según la volatilidad esperada, suponiendo unos dividendos constantes



La figura 8.4 es la resolución de la ecuación F = 1000 - [Put (K = 1.000) + Put (K = F)] r, para el caso de que no hubiera opciones sobre las acciones de ZZZ y suponiendo que el valor actual de los dividendos de la empresa en el próximo año fuesen 100 pesetas. Obsérvese cómo cambia F con la volatilidad esperada.

8.3. Forward con precio variable

Un banco de inversiones ha creado un contrato especial forward con precio variable sobre el platino. Cada contrato se refiere a una onza de platino y la fecha de ejercicio es dentro de un año. Las características del contrato son las mismas que las de los contratos forward normales, excepto por una característica: el precio que el comprador deberá pagar en la fecha de ejercicio se reducirá si el precio de mercado del platino en ese momento es menor que 40.000 ptas por onza. La cantidad de la reducción será la diferencia entre el precio de mercado y 40.000 ptas. Si el precio de mercado en la fecha de ejercicio es mayor que 40.000 ptas. el comprador tendrá que pagar el precio forward completo. Al igual que con un contrato forward habitual, no existe flujo de dinero en el momento de la iniciación del contrato.

Existen calls y puts europeas cada una sobre una onza de platino y con un año hasta la fecha de ejercicio, que se negocian a los siguientes precios:

Precio de ejercicio	Call	Put
40.000	12.000	3.000
50.000	8.000	7.000

El precio actual del platino es de 45.000 ptas. por onza. Si el mercado valora las opciones correctamente, ¿cuál debe ser el precio forward de este contrato?

Valoración del forward con precio variable

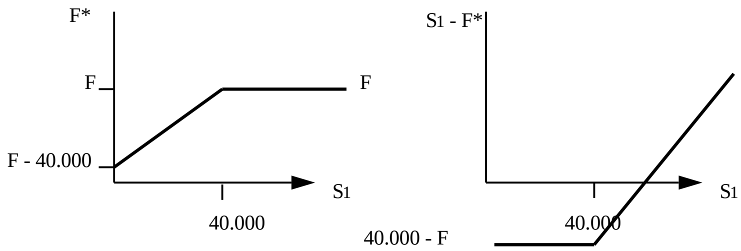
	Hoy	1 año

	S = 45.000	
Comprador del contrato forward con precio variable:	—	S_1 - F*

El precio F* que se pagará dentro de un año por cada onza de platino es:

F* =	F	si $S_1 > 40.000$
	F- (40.000 - S_1)	si $S_1 < 40.000$

Figura 8.5. Forward con precio variable. Precio F* que se pagará dentro de un año por cada onza de platino y posición del comprador dentro de un año (S_1 - F*)



Establecemos las dos relaciones put-call parity para las opciones que conocemos:

$C + Kr^{-t} = S - D + P$

12.000 + 40.000 / r = 45.000 - D + 3.000

8.000 + 50.000 / r = 45.000 - D + 7.000

Resolviendo ambas ecuaciones resulta: r = 10/8 = 1,25; D = 4.000 pesetas. D es el valor actual neto de lo que se puede obtener prestando el platino. Nótese que es el mismo concepto asociado al dividendo: el VAN de lo que obtendrá entre hoy y la fecha de ejercicio el poseedor del activo a que se refiere la opción.

Lo que obtenemos con el forward dentro de un año es:

S_1 - F* = S_1- MIN [F, F - (40.000 - S_1)] = [25]

= S_1 + MAX[- F, - F+(40.000 - S_1)] = MAX[S_1 - F, 40.000 - F] =

= 40.000 - F + MAX[S_1 - 40.000, 0]

Esta expresión la podríamos haber sacado directamente de la figura 8.5, sin ningún desarrollo algebraico.

Por ser un contrato sin desembolso hoy, su valor actual neto es cero:

0 = VAN [40.000 - F + MAX(S_1 - 40.000, 0)] =

= (40.000 - F) / 1,25 + CALL (1 onza de platino; 1 año; K = 40.000 pts.) =

= (40.000 - F) / 1,25 + 12.000.

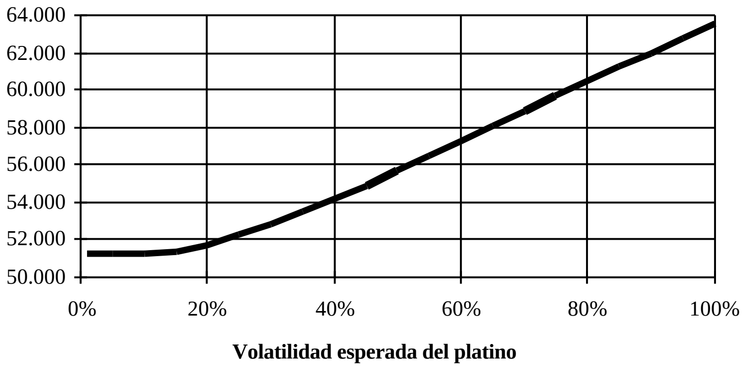
Luego, con las opciones del problema[26], **F = 55.000 pesetas.**

La figura 8.6 muestra cómo cambia el precio F con la volatilidad esperada del platino, según la expresión: F = 40.000 + 1,25 Call (1 onza de platino; 1 año; K = 40.000; vol.)

[25] Ver que 5 - MIN(2, 3)= 5 + MAX(-2, -3) = 3.

[26] El lector puede comprobar que la volatilidad implícita de las opciones con precio de ejercicio 40.000 es 45,5% y la de las de precio de ejercicio 50.000 es 46,8%.

Figura 8.6. Resolución de (40.000 - F) / 1,25 + CALL (K = 40.000 pts.) = 0



9. Contrato de futuros exótico

Contrato en el que la liquidación diaria del contrato de futuros se realiza con la variación del precio spot en lugar de con la variación del precio de futuros.

<u>CONTRATO EXOTICO:</u>

Periodo	**0**	**1**	**2**	**3**	**N**
Precio de la acción	$\mathbf{S_0}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_3}$	$\mathbf{S_N}$
Flujos de la posición compradora	-	$S_1 - S_0$	$S_2 - S_1$	$S_3 - S_2$	$S_N - F^* + S_0 - S_{N-1}$

El VAN en t=0 (hoy) de los distintos flujos es:

$VAN_0\ (S_1 - S_0)_{en\ t=1} = S_0 - S_0 / r > 0$

$VAN_0\ (S_2 - S_1)_{en\ t=2} = S_0 - S_0 / r = VAN_0\ (S_3 - S_2)_{en\ t=3} =...= S_0 - S_0 / r$

Conviene resaltar que VAN_1 de $S_{1\ en\ t=2} = S_1 / r$

$VAN_0\ (S_N - F^* + S_0 - S_{N-1})_{en\ t=N} = S_0 - F^* / r^N + S_0 / r^N - S_0 / r$

El precio F* se fijará de modo que el VAN en t=0 de todos los flujos sea cero, luego:

$(N-1)\ (S_0 - S_0 / r) + S_0 - F^* / r^N + S_0 / r^N - S_0 / r = 0.$ Luego:

$$\mathbf{F^* = S_0\ [\ 1 + N\ r^{N-1}\ (r - 1)\ ]}$$

Lógicamente (a continuación veremos porqué) este precio es superior al precio *forward* (y de futuros): $\mathbf{F = S_0\ r^N}$

Tabla 5. Diferencia entre el precio de futuros exótico (F*) y el precio de futuros ordinario (F) a 1 año según el tipo de interés y la frecuencia de la liquidación de las posiciones

So=100
1 año

F*-F

N \ r_a	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
1	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F=	150,00	140,00	130,00	120,00	110,00

Veamos cómo compara este contrato con el de futuros. No consideramos la garantía inicial.

<u>CONTRATO DE FUTUROS:</u>

Periodo	**0**	**1**	**2**	**3**	**N**
Precio de la acción	$\mathbf{S_0}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_3}$	$\mathbf{S_N}$

Precio de futuros	**F**	$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$	$\mathbf{F_3}$	$\mathbf{F_N}$
Flujos de la posición compradora	-	$F_1 - F$	$F_2 - F_1$	$F_3 - F_2$	$S_N - F + F - F_{N-1}$

Sabemos que: $F = S_0 r^N$; $F_1 = S_1 r^{N-1}$; $F_2 = S_2 r^{N-2}$; ...; $F_{N-1} = S_{N-1} r$; $F_N = S_N$

El VAN en t=0 (hoy) de los distintos flujos es:

$VAN_0 (F_1 - F)_{en\ t=1} = S_0 r^{N-1} - F/r = 0$

$VAN_0 (F_2 - F_1)_{en\ t=2} = S_0 r^{N-2} - S_0 r^{N-2} = 0 = VAN_0 (F_3 - F_2)_{en\ t=3} =...= 0$

Ya que VAN_1 de $S_{1\ en\ t=2} = S_1 / r$; VAN_0 de $S_{2\ en\ t=2} = S_0$

$VAN_0 (S_N - F + F - F_{N-1})_{en\ t=N} = S_0 - S_0 = 0.$

Se observa que el precio F cumple que el VAN en t=0 de todos los flujos sea cero.

... del interés anual función del tipo de interés anual (Ra) y del número de veces que se ajustan las posiciones (N). Nótese que

Figura 9.1. Diferencia porcentual del precio del contrato exótico (F*) respecto del precio de futuros (F), según el número de veces que se produce el ajuste (N) y el tipo de interés anual (Ra). Contratos con un año

Si la liquidación se realizase instantáneamente (N = 8), entonces (F* - F) / F = 1/r -1 + ln(r).

ANEXO 1. Función normal bivariante estándar

Si X e Y son dos variables normales N(0,1), la función acumulada de probabilidad conjunta, esto es, la probabilidad de que X sea menor que a y que Y sea también menor que b es la función acumulada de probabilidad de una distribución normal bivariante estándar, cuya expresión es:

$$\text{Prob (X<a e Y<b)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} \exp\left[- \frac{X^2-2\rho XY+Y^2}{2(1-\rho^2)} \right] dX\, dY = N_2(a,b;\rho)$$

donde ρ es la correlación entre las variables aleatorias X e Y.

El primer paso en la aproximación de la probabilidad de la normal bivariante $N_2(a,b;\rho)$ implica el desarrollo de una rutina que evalúe la función $\Phi(a,b;\rho)$:

$$\Phi(a,b;\rho) \approx 0{,}31830989 \sqrt{1-\rho^2} \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{5} w_i w_j\, f(X_i, X_j),$$

donde $f(X_i, X_j) = \exp\left[a_1(2X_i-a_1) + b_1(2X_j-b_1) + 2\rho(X_i-a_1)(X_j-b_1)\right]$.

Los datos necesarios (w_i, w_j, X_i, X_j) son:

i,j	w	X
1	0,24840615	0,10024215
2	0,39233107	0,48281397
3	0,21141819	1,0609498
4	0,033246660	1,7797294
5	0,00082485334	2,6697604

y los coeficientes a_1 y b_1 son:

$$a_1 = \frac{a}{\sqrt{2(1-\rho^2)}} \quad \text{y} \quad b_1 = \frac{b}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}$$

El segundo paso en la aproximación implica el cálculo del producto $ab\rho$.

Si $ab\rho = 0$, calculamos la probabilidad de la normal bivariante $N_2(a,b;\rho)$ utilizando las siguientes reglas:

1. Si a = 0, b = 0 y $\rho = 0$, entonces $N_2(a,b;\rho) = \Phi(a,b;\rho)$
2. Si a = 0, b > 0 y $\rho > 0$, entonces $N_2(a,b;\rho) = N_1(a) - \Phi(a,-b;-\rho)$
3. Si a > 0, b = 0 y $\rho > 0$, entonces $N_2(a,b;\rho) = N_1(b) - \Phi(-a,b;-\rho)$
4. Si a > 0, b > 0 y $\rho = 0$, entonces $N_2(a,b;\rho) = N_1(a) + N_1(b) - 1 + \Phi(-a,-b;\rho)$

Si $ab\rho > 0$, calculamos la probabilidad de la normal bivariante $N_2(a,b;\rho)$ como:

$$N_2(a,b;\rho) = N_2(a,0;\rho_{ab}) + N_2(b,0;\rho_{ba}) - \delta,$$

donde los valores de $N_2(\cdot)$ de la derecha son calculados según las reglas cuando $ab\rho = 0$,

$$\rho_{ab} = \frac{(\rho a-b)Sgn(a)}{\sqrt{a^2-2\rho ab+b^2}}, \qquad \rho_{ba} = \frac{(\rho b-a)Sgn(b)}{\sqrt{a^2-2\rho ab+b^2}}, \qquad \delta = \frac{1-Sgn(a)\cdot Sgn(b)}{4}$$

y Sgn(z) = 1 si z = 0
-1 si z < 0

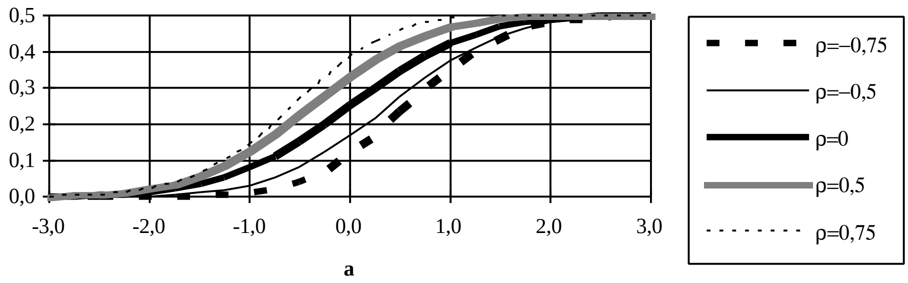
Para ayudar al lector que intente utilizar este algoritmo mostramos algunos ejemplos de valores de la normal bivariante estándar:

a	b	r	N₂(a,b;r)
-1,00	-1,00	0,50	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0,00	0,00	-0,50	0,333333

Algunas relaciones útiles son: $N_2(a,b;\rho) = N_2(b,a;\rho)$. $N_2(a,a;0) = [N_1(a)]^2$. $N_2(a,a;1) = N_1(a)$. $N_2(a,b;0) = N_1(a) \times N_1(b)$.

La figura A1.1 muestra algunos valores de la función normal bivariante estándar cuando b=0.

Figura A1.1. $N_2(a,0;r)$



Simulación de la función normal bivariante estándar

Hull (1989) propone el siguiente método:

1. Generar dos muestras de dos variables normales N(0,1) independientes: X e Y.

2. $?_1$ = X; $?_2$ = Xρ + Yv(1-ρ²). $?_1$ y $?_2$ son una muestra de una función normal bivariante estándar con correlación ρ.

Anexo 2. Cálculo del valor de opciones europeas ordinarias (fórmula de Black y Scholes) por el procedimiento de las martingalas.

En este anexo vamos a calcular el valor de la opción hoy, esto es, el Valor Actual Neto del valor de la opción en la fecha de ejercicio: MAX $(S_t$ - K, 0). Partimos de la ecuación estocástica (aleatoria) que caracteriza la evolución del precio de la acción y llegaremos a la fórmula de Black y Scholes a través del VAN por aplicación directa de las propiedades de la distribución normal.

Comenzamos por las dos fórmulas que proporcionan la evolución del precio de la acción en el tiempo S_t y el valor esperado de la acción en un tiempo t del futuro. Seguimos considerando el momento 0 como en el instante actual.

$$S_t = S\, e^{(\mu t + \sigma \varepsilon \sqrt{t})} \qquad E(S_t) = S\, e^{(\mu + \sigma^2/2)\, t}$$

t =	**0**	**t** (fecha de ejercicio)	
	S	S_t	Precio de la acción
	C	MAX $(S_t$ - K, 0)	Valor de la call
	P	MAX (K - S_t, 0)	Valor de la put

A2.1. Derivación simplificada de la fórmula de Black y Scholes para una call

C es el valor de la opción en t = 0, y ha de ser, por definición, el valor actual neto (VAN) de los flujos futuros derivados de ella. Sabemos cuál será el flujo de dinero que recibirá el poseedor de la opción en la fecha de ejercicio: MAX $(S_t$ - K, 0). Por consiguiente:

$C = VAN_Q [\, E_Q\{ MAX(S_t - K; 0) \}] =$

$= VAN_Q [\, E_Q\{(S_t - K) \,\&\, S_t > K\}] =$ [27]

$= VAN_Q [\, E_Q\{S_t \,\&\, S_t > K\}] - VAN_Q [\, E_Q\{K \,\&\, S_t > K\}]$ (A2.1)

En los siguientes apartados vamos a calcular los valores actuales netos (VAN_Q) de la expresión (A2.1)

Cómo realizar el valor actual neto (VAN_Q)

Si dos inversores calculasen el VAN de la opción utilizando distintas expectativas sobre el valor futuro de la acción (con distintas μ) obtendrían distintos resultados. Pero esto sería inconsistente con lo que ya hemos comprobado al valorar la opción por el método binomial. Por ejemplo, la figura A2.1 muestra la distribución de probabilidad de la rentabilidad de la acción en un año de dos inversores con idéntica expectativa de volatilidad (20%), pero distinta expectativa de rentabilidad: uno espera una revalorización

---

[27] Recordar que $\{(S_t - K) \,\&\, S_t > K\}$ significa:
$(S_t - K)$ si $S_t > K$
0 si $S_t = K$

del 20% y el otro una caída del 20%. La figura A2.2 muestra la distribución de probabilidad del precio de la acción de los mismos inversores. Si ambos inversores realizaran el VAN de la opción utilizando sus expectativas, llegarían a distintos valores. Pero sabemos que los inversores (si coinciden en su expectativa de volatilidad) han de estar de acuerdo en el precio de la opción porque la opción puede replicarse con acciones y bonos.

Por consiguiente -y esto es una regla general para valorar instrumentos financieros que pueden construirse a partir de otros (instrumentos replicables)- no se puede calcular el VAN utilizando las expectativas de rentabilidad (μ) que el inversor tenga, sino que debe utilizar una expectativa de rentabilidad que viene dada por[28]:

$\mu = \ln (r) - s^2 / 2$, siendo $r = 1 + R_F$

Utilizando este valor de tanto para realizar el valor esperado como para calcular el VAN, realizaremos la valoración por el procedimiento de las martingalas. Otro modo de escribir el presente anexo sería calcular con qué expectativas de rentabilidad (μ) el valor actual neto de MAX (S_t - K, 0) coincide con la fórmula de Black y Scholes. Obtendríamos la ecuación ya mencionada: $\mu = \ln (r) - \sigma^2 / 2$.

Figura A2.1. Distribución de probabilidad de la rentabilidad de la acción en un año de dos inversores con idéntica expectativa de volatilidad (20%), pero distinta expectativa de rentabilidad: uno espera una revalorización del 20% y el otro una caída del 20%.

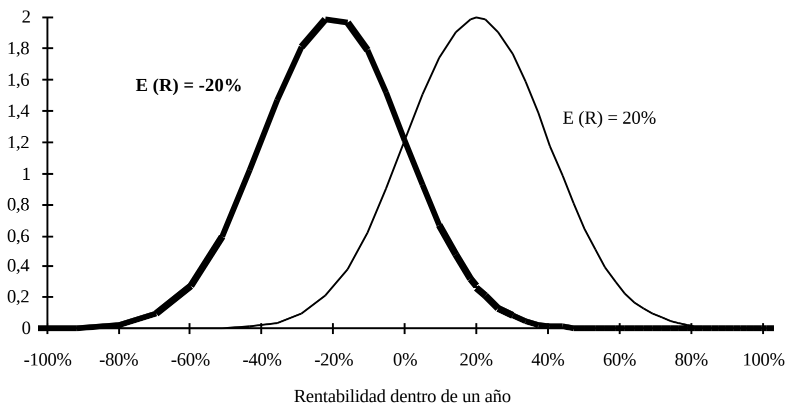


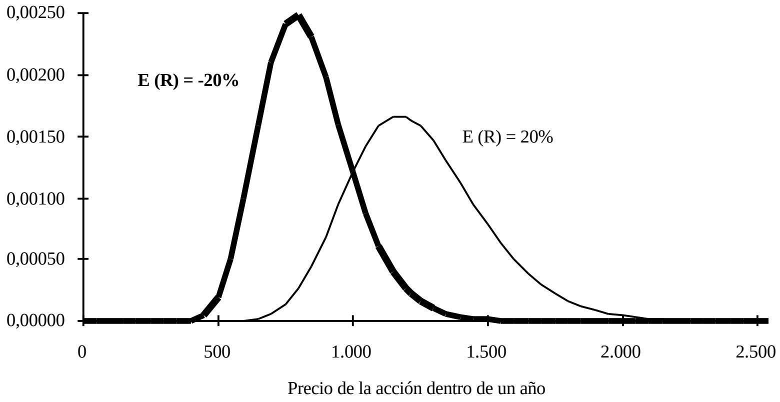
Figura A2.2. Distribución de probabilidad del precio de la acción de dentro de un año de dos inversores con idéntica expectativa de volatilidad (20%), pero distinta expectativa de rentabilidad: uno espera una revalorización del 20% y el otro una caída del 20%. El precio actual de la acción es 1.000 pesetas.

---

[28] Esta imposición se basa en que cuando un instrumento financiero se puede valorar por arbitraje (es replicable a partir de otros ya existentes), las relaciones entre los precios se mueven en un espacio de probabilidad sin riesgo. En ese espacio de probabilidad, el valor esperado del precio de una acción (cuyo precio hoy es S pesetas) es igual al valor esperado de invertir esas pesetas a la tasa sin riesgo:

$E (S_t) = S\, e^{(\mu + \sigma 2/2)t} = S\, r^t$; por consiguiente: $\mu + \sigma^2/2 = \ln(r)$.

Un modo indirecto de argumentar esta imposición es el siguiente. El valor de una opción (y de cualquier instrumento derivado) no depende de las expectativas (μ) respecto a la revalorización del subyacente. Sin embargo, el valor que se obtiene en la simulación sí que depende de la μ que se utilice. Por consiguiente, μ ha de estar fijada, de modo que todos los inversores utilicen la misma aunque tengan distintas expectativas.



Cálculo de VAN_Q [$E_Q\{K$ & $S_t > K\}$]

Es evidente que, al ser K una constante: $E_Q\{K \& S_t > K\} = K\ P_Q[S_t > K]$

Evaluamos $P[S_t > K]$, esto es, la probabilidad de que el precio de la acción S_t sea mayor que K en t = t. Sustituyendo el valor de S_t y con un poco de álgebra, hacemos el desarrollo siguiente:

$P[S_t > K] = P\ [S\ e^{(\mu\ t\ +\ \sigma\ \varepsilon\ vt)} > K] = P[\mu\ t + \sigma\ \varepsilon\ vt > Ln\ (K / S)] =$

$= P\ [\sigma\ \varepsilon\ vt > \ln\ (K / S) - \mu\ t] = P\ [\varepsilon > - [\ln\ (S / K) + \mu\ t] / [\sigma\ vt]]$

ε es una variable normal de media cero y varianza unidad. Sabemos que en una distribución normal: $P\ [\varepsilon > - H] = P\ [\varepsilon < H]$. Por consiguiente:

$P\ [S_t > K] = P\ [\varepsilon < [\ln\ (S / K) + \mu\ t] / [\sigma\ vt]]$. Al calcular el valor esperado en el espacio de probabilidad correspondiente al método de las martingalas, imponemos la condición: $\mu = \ln r - \sigma^2/2$.

$P_Q[S_t > K] = P_Q[\varepsilon < [\ln\ (S / K) + \ln r^t - t\ \sigma^2 / 2] / [\sigma\ vt]]$

ε es una distribución normal (0,1); por tanto:

$P_Q[S_t > K] = N\ ([\ln\ (S / K\ r^{-t}) - t\ \sigma^2 / 2] / [\sigma\ vt])$.

Definiendo x como: $\mathbf{x = [Ln\ (S / K\ r^{-t}) + t\ s^2 / 2] / [s\ vt]}$ (A2.2)

obtenemos la siguiente expresión[29]:

$\mathbf{P_Q[S_t > K] = N\ (x - s\ vt)}$ (A2.3)

A partir de (A2.2), es fácil concluir que:

$VAN_Q\ [\ E_Q\{K \& S_t > K\}] = VAN_Q\ [\ K\ P_Q[S_t > K]] = VAN_Q\ [\ K\ N\ (x - \sigma\ vt)] =$

---

[29] Es importante darse cuenta que $P_Q[S_t > K] = N\ (x - \sigma\ vt)$ sólo si $\mu = \ln r - \sigma^2 / 2$. Esta última condición viene impuesta por el hecho de que la opción se puede replicar (por ejemplo, con acciones y bonos). Una pregunta interesante es para qué precio de ejercicio $P[S_t > K] = 0{,}5$. Resulta ser $K = S\ e^{\mu t}$, que es la mediana de S_t.

$= K\, r^{-t}\, N(x - \sigma \sqrt{t})$

Cálculo de VAN_Q [$E_Q\{S_t$ & $S_t > K\}$]

Calculamos primero $E_Q\{S_t \;\&\; S_t > K\}$.

$$E\{S_t \;\&\; S_t > K\} \;=^{(30)}\; \int_{-x+\sigma\sqrt{t}}^{\infty} S\, e^{(\mu t + \sigma \varepsilon \sqrt{t})}\, (2\pi)^{-1/2}\, e^{-\varepsilon^2/2}\, d\varepsilon =$$

$$= S\, e^{\mu t} \int_{-x+\sigma\sqrt{t}}^{\infty} e^{\sigma\varepsilon\sqrt{t} - \varepsilon^2/2}\, (2\pi)^{-1/2}\, d\varepsilon = S\, e^{(\mu + \sigma^2/2)\, t} \int_{-x+\sigma\sqrt{t}}^{\infty} e^{-(\sigma\sqrt{t} - \varepsilon)^2/2}\, (2\pi)^{-1/2}\, d\varepsilon$$

La resolución de esta integral se simplifica haciendo un cambio de variables:
$v = \sigma\sqrt{t} - \varepsilon$; $dv = -\, d\varepsilon$; así:
– para $S_t = K$: $\varepsilon = -x + \sigma\sqrt{t}$ y $v = x$;
– para $S_t = \infty$: $\varepsilon = \infty$ y $v = -\infty$.

Con estos resultados:

$$E\{S_t \;\&\; S_t > K\} = S\, e^{(\mu + \sigma^2/2)\, t} \int_{-\infty}^{x} e^{-v^2/2}\, (2\pi)^{-1/2}\, dv = S\, e^{(\mu + \sigma^2/2)\, t}\, N(x)$$

Hemos de considerar $e^{(\mu + \sigma^2/2)\, t} = r^t$. Como consecuencia:
$E_Q\{S_t \;\&\; S_t > K\} = S\, r^t\, N(x)$. Por consiguiente:
$VAN_Q\, [\, E_Q\{S_t \;\&\; S_t > K\}] = r^{-t}\, E_Q\{S_t \;\&\; S_t > K\} = S\, N(x)$ (A2.4)

Sustituyendo (A2.2) y (A2.3) en (A2.1) obtenemos la fórmula de Black y Scholes para una call:

$C = S\, N(x) - K\, r^{-t}\, N(x - \sigma\sqrt{t})$
siendo $x = \mathrm{Ln}\,(S / Kr^{-t}) / (\sigma\sqrt{t}) + \sigma\sqrt{t} / 2$

Recordemos que C es el precio de la opción en t = 0. C es, por consiguiente, el precio de una opción de compra con precio de ejercicio K y con un periodo t (expresado en años, días... dependiendo de con qué unidades midamos σ y r) hasta la fecha de ejercicio.

[30] Nótese que para $S_t = K$, $\varepsilon = -x + \sigma\sqrt{t}$.

A2.2. Derivación simplificada de la fórmula de Black y Scholes para una put europea

P es el valor de la opción de venta en t = 0, y es, por definición, el valor actual neto (VAN) de los flujos futuros derivados de ella. Sabemos cuál será el flujo de dinero que se producirá en la fecha de ejercicio. Por consiguiente:

$P = VAN_Q [\, E_Q\{ MAX(K - S_t\, ; 0) \}] =$

$= VAN_Q [\, E_Q\{(K - S_t) \,\&\, S_t < K\}] =$ [31]

$= VAN_Q [\, E_Q\{K \,\&\, S_t < K\}] - VAN_Q [\, E_Q\{S_t \,\&\, S_t < K\}]$ (A2.5)

Ahora vamos a evaluar los dos valores actuales netos (VAN) de esta expresión.

Cálculo de $VAN_Q [\, E_Q\{K \,\&\, S_t < K\}]$

$E_Q\{K \,\&\, S_t < K\} = K\, P_Q[S_t < K]$

$P[S_t < K] = P\, [S\, e^{(\mu t + \sigma \varepsilon \sqrt{t})} < K] =$

$= P[\mu t + \sigma \varepsilon \sqrt{t} < \ln (K / S)] = P\, [\varepsilon < [\ln (K / S) - \mu t] / [\sigma \sqrt{t}]]$

Como $\mu = \ln r - \sigma^2 / 2$ y que ε es una distribución normal (0,1):

$P_Q[S_t < K] = P_Q[\varepsilon < [\ln (K / S) - \ln r^t + t\, \sigma^2 / 2] / [\sigma \sqrt{t}]] =$

$= P_Q[\varepsilon < [\ln (Kr^{-t} / S) + t\, \sigma^2 / 2] / [\sigma \sqrt{t}]] =$

$= N\, ([\ln (Kr^{-t} / S) + t\, \sigma^2 / 2] / [\sigma \sqrt{t}])$. Definiendo x como

$x = \ln (S / K\, r^{-t}) / (\sigma \sqrt{t}) + \sigma \sqrt{t} / 2$

resulta: $P_Q[S_t < K] = N\, (- x + \sigma \sqrt{t})$.

Por tanto:

$\mathbf{VAN_Q [\, E_Q\{K \,\&\, S_t < K\}] = K\, r^{-t}\, N\, (- x + \sigma \sqrt{t})}$ (A2.6)

Cálculo de $VAN_Q [\, E_Q\{S_t \,\&\, S_t < K\}]$

$VAN_Q [\, E_Q\{S_t \,\&\, S_t < K\}]$

$VAN\, [S_t / S_t > K]\, P[S_t > K] = r^{-t}\, E\, [S_t / S_t < K]\, P\, [S_t < K]$.

$$E\{S_t \,\&\, S_t < K\} = {}^{(32)} \int_{-\infty}^{-x + \sigma \sqrt{t}} S\, e^{(\mu t + \sigma \varepsilon \sqrt{t})}\, (2\pi)^{-1/2}\, e^{-\varepsilon^2 / 2}\, d\varepsilon =$$

$$= S\, e^{\mu t} \int_{-\infty}^{-x + \sigma \sqrt{t}} e^{\sigma \varepsilon \sqrt{t} - \varepsilon^2/2}\, (2\pi)^{-1/2}\, d\varepsilon = S\, e^{(\mu + \sigma^2/2)\, t} \int_{-\infty}^{-x + \sigma \sqrt{t}} e^{-(\sigma \sqrt{t} - \varepsilon)^2 /2}\, (2\pi)^{-1/2}\, d\varepsilon$$

---

31 Recordar que $\{(K - S_t) \,\&\, S_t < K\}$ significa:

$(K - S_t)$ si $S_t < K$

0 si $S_t = K$

32 Nótese de nuevo que para $S_t = K$, $\varepsilon = - x + \sigma \sqrt{t}$.

Haciendo el cambio de variables: $v = \sigma\sqrt{t} - \varepsilon$; $dv = - d\varepsilon$; resulta

– para $S_t = K$: $\varepsilon = - x + \sigma\sqrt{t}$ y $v = x$;

– para $S_t = 0$: $\varepsilon = -\infty$ y $v = +\infty$. Con estos resultados:

$$E\{S_t \,\&\, S_t < K\} = S\, e^{(\mu + \sigma^2/2)t} \int_x^{\infty} e^{-v^2/2} (2\pi)^{-1/2}\, dv = S\, e^{(\mu + \sigma^2/2)t}\, N(- x)$$

$= S\, e^{(\mu + \sigma^2/2)t}\, N(- x)$. Como $e^{(\mu + \sigma^2/2)t} = r^t$, entonces:

$$E_Q\, \{S_t \,\&\, S_t < K\} = S\, r^t\, N(- x). \tag{A2.7}$$

Por consiguiente: $VAN_Q\, [\, E_Q\{S_t \,\&\, S_t < K\}] = S\, N(- x)$ (A2.8)

A partir de (A2.4) y (A2.5) obtenemos la fórmula de Black y Scholes para una put:

$$\mathbf{P = K\, r^{-t}\, N(- x + \sigma\sqrt{t}) - S\, N(- x)}$$

siendo $x = [\mathrm{Ln}\,(S / Kr^{-t}) + \sigma^2 t / 2] / (\sigma\sqrt{t})$

P es el precio de la put europea en t = 0. P es, por consiguiente, el precio de la put europea con precio de ejercicio K y con un periodo t (expresado en años, días... dependiendo de con qué unidades midamos σ y r) hasta la fecha de ejercicio.

Anexo 3. Teoría de valoración de activos por el procedimiento de las martingalas.

El propósito de este anexo es utilizar la teoría de valoración de martingalas de Harrison and Kreps (1979) para poner precio a activos derivados en una economía en la que se dispone de contratos forward sobre un activo principal. En particular obtendremos la fórmula de la opción compradora del activo principal dado el proceso estocástico que siguen los precios forward y la rentabilidad del activo sin riesgo. Especificaremos también la “trading strategy” del portfolio duplicante del activo derivado.

Una completa y satisfactoria teoría de valoración de opciones ha sido desarrollada desde que Fisher Black and Myron Scholes (1973) escribieron su primer artículo sobre la valoración de opciones compradoras. Para llegar a su fórmula ellos crearon una cartera que instante a instante no tenía riesgo. Esta cartera se formaba mediante la compra de una acción y la venta de la opción. Esta posición se revisa continuamente de acuerdo con los cambios del valor de la acción de modo que la rentabilidad de esta cartera es segura. Para evitar oportunidades de arbitraje el valor de esta cartera en cualquier momento tiene que ser su valor final descontado a la tasa sin riesgo. Una ecuación en derivadas parciales se obtiene de la dinámica que gobierna esta cartera cuya solución con las hipótesis habituales es la celebrada fórmula de Black-Scholes.

Merton (1977) encontró un modelo general de valoración de activos derivados. Un activo derivado es un activo cuyo valor en una futura fecha especificada está únicamente determinado por el valor de otro activo, el activo principal. Una opción compradora es un activo derivado cuyo activo principal es la acción y, por tanto, la valoración de opciones compradoras es una aplicación particular de este método de valoración de Merton, que es más general.

Las hipótesis del modelo de valoración de activos derivados de Merton son: 1) la existencia de un activo sin riesgo cuya rentabilidad r es constante y conocida. 2) Un activo para el cual se conoce el proceso estocástico que genera su valor sobre el tiempo, y que puede ser representado por un proceso de difusión. 3) El activo derivado, cuyo valor en todo momento es función del valor del primer activo (subyacente). El artículo de Merton da el valor de este segundo activo como solución de una ecuación en derivadas parciales con condiciones de contorno dependiendo de los términos del activo derivado. Merton también especifica la "trading strategy" en tiempo continuo: una cartera compuesta por el activo sin riesgo y el suyacente, cuyo valor en cualquier instante es el valor del activo derivado. Este modelo permite que el activo principal y el activo derivado paguen a sus poseedores una corriente continua de dividendos y la estrategia que lleva el portfolio duplicante es, en lenguaje de Harrison y Kreps, una estrategia autofinanciada. Es decir, no son necesarios nuevos fondos para modificar la cartera réplica.

Black (1976), en un clarificador artículo sobre contratos de futuros y forwards, obtiene la fórmula de una opción compradora en función de los precios forward del subyacente. Su procedimiento es esencialmente el mismo al de la fórmula original de valoración de una opción dada en 1973. Bick (1988) extiende el artículo de Black calculando el precio de activos derivados en un mercado continuo en el cual se pueden hacer contratos forward sobre el subyacente. También especifica la estrategia de contratos forward que replica el valor del activo derivado. Para su valoración, sólo es necesario conocer el proceso de difusión que gobierna los precios forward y la rentabilidad del activo sin riesgo.

Un tratamiento diferente de la valoración de activos derivados fue sugerida por Cox y Ross (1976) y plenamente desarrollada por Harrison y Kreps (1979). Señalan las condiciones del precio de los activos para que éstos sean martingalas en una adecuada filtración y un adecuado espacio de probabilidad. El valor actual de estos activos es por tanto el valor esperado futuro suyo en este espacio de probabilidad.

Después de presentar este marco de matingalas en la primera sección de este artículo (las referencias para entender este modelo son Cox y Huang (1988), Duffie (1988), Harrison y Kreps (1979) y Harrison y Pliska (1981)), nosotros lo utilizamos en la segunda sección para derivar una valoración de los activos derivados cuando se dispone de contratos forwards sobre el activo principal. En particular obtenemos la fórmula de Black para el valor de una opción compradora en función de sus precios forward. Se da también la "trading strategy" para el portfolio reduplicante del activo derivado. Los resultados en este anexo son, por tanto, similares a los de Black y Bick, pero nuestro tratamiento es bastante diferente y quizá más razonable. La tercera sección es un resumen del artículo.

I EL MODELO

Para formular nuestro modelo de mercado comenzamos especificando un horizonte temporal T que es la fecha terminal de toda actividad económica. Los activos se pueden negociar en cualquier tiempo t entre 0 y T (0 = t = T). Nosotros también fijamos un espacio de probabilidad (*?* , *F*, *P*), donde cada ω perteneciente a ? se puede interpretar como una completa descripción de un posible estado del mundo. *F* es la σ-álgebra de sucesos distinguibles en el momento T, y *P* es una probabilidad sobre (? , *F*). Es necesario para nuestro modelo que todos los inversores estén de acuerdo en qué sucesos en *F* tienen una probabilidad positiva de ocurrir, pero no es necesario que ellos estén de acuerdo en la asignación de esas probabilidades. El modelo permanece, siendo válido si nosotros cambiamos P por cualquier probabilidad equivalente Q (una probabilidad Q en la cual P(A) > 0 si y sólo si Q(A) > 0).

Los inversores están dotados de una estructura de información que es una familia de sub-σ-álgebra de *F* = { F_t: 0 = t = T }, que a su vez es una completa especificación de la revelación de la información a lo largo del tiempo. Por ejemplo, si un suceso A pertenece a F_t entonces en el momento t los inversores conocen si el verdadero estado del mundo está en A o no. Nosotros supondremos que *F* es creciente (F_tCF_s para t =s) es decir, que la información revelada no se olvida. F_T = *F*, es decir, que en el momento T nosotros conocemos cuál es el verdadero estado del mundo. En el momento 0 nosotros sólo conocemos los sucesos que tienen probabilidad 0 ó 1 de ocurrir. F es, en lenguaje probabilístico, una filtración. Más tarde explicaremos cómo los inversores obtienen esta estructura de información.

Los activos disponibles en el mercado son los mismos que en Bick (1988):

a) Un activo principal que por conveniencia supondremos no paga dividendos antes del momento T. Podemos pensar en una acción pero podría ser cualquier otro activo.

b) Un activo sin riesgo con tasa de rentabilidad conocida y constante r.

c) Contratos forward sobre el activo subyacente con fecha de intercambio T, es decir, un compromiso hecho en cualquier momento t para comprar en el momento T una acción por un precio forward ζ_t. Si en un momento posterior el precio forward es ζ_s el valor en el momento s del contrato hecho en el momento t es, por motivos de arbitraje, $(\zeta_s-\zeta_t)\, r^{-(T-s)}$.

Supondremos que los precios forward ζ_t a lo largo del tiempo siguen una distribución logaritmo-normal, es decir:

$$\zeta_t = \zeta_0 \exp[(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma w(t)]$$

donde w(t) es un movimiento Browniano estándar (una buena referencia para el movimiento Browniano estándar y para conceptos de probabilidad usados en este artículo son Chung (1974) y Durret (1984)). μ y σ se pueden considerar como funciones de t y ζ_t ó como constantes.

La información común F_t disponible en el momento t es la que revela los precios forward hasta el momento t. No se conocen cuales serán los precios forward después del momento t, por tanto F_t es la sub- σ- álgebra generada por ζ_s para 0 = s = t. En matemática grafología

$$F_t = \sigma\{ \zeta_t : 0 = s = t\} = \sigma\{w(s) : 0 = s = t\}$$

La última igualdad se verifica porque ζ_t y w(t) están determinísticamente relacionados.

También supondremos que estamos en un mercado sin fricciones, es decir, que no hay ni impuestos ni costes de transacciones. El tomar prestado y la venta a crédito está permitida sin restricciones y los tipos de interés para tomar prestado y para prestar son los mismos. La negociación tiene lugar continuamente (estamos en un mercado continuo).

Sea $S_0(t)$ el valor en el momento t del derecho a un dólar en el momento T ($S_0(t) = r^{-(T-t)}$) y $S_1(t)$ es el valor en el momento t de un ticket que da a su poseedor el derecho en el momento T a una acción (dados los precios forward ζ_t, $S_1(t)$ es el valor actual en el momento t de ζ_t es decir, $S_1(t) = \zeta_t\, r^{-(T-t)}$). Este ticket es, de hecho, una cartera de un contrato forward y ζ_t unidades del activo sin riesgo. Se paga ahora el valor actual neto del precio forward y se recibe el activo derivado en el momento T.

Una “trading strategy” es un par de funciones Φ_0 y Φ_1 de ? x[0, T] en **R**. $\Phi_0(\omega, t)$ y $\Phi_1(\omega, t)$ son el número de unidades del activo sin riesgo y de los contratos forward que el inversor tiene justo antes de negociar en el instante t. Una natural restricción sobre Φ_0 y Φ_1 es que sus valores son los mismos para estados del mundo que son indistinguibles antes del momento t, dada la estructura de información F. En lenguaje matemático eso significa que Φ_0 y Φ_1 son predictibles con respecto a la filtración F.

Una estrategia autofinanciada es una que no reguiere ni genera fondos entre el momento 0 y T:

$$V(t) = \Phi_0(t)\, S_0(t) + \Phi_1(t)\, S_1(t) = \Phi_0(0)\, S_0(0) + \Phi_1(0)\, S_1(0) +$$

$$+ ?_0^t \Phi_0(s)\, dS_0(s) + ?_0^t \Phi_1(s)\, dS_1(s) \qquad \text{Para } 0 = t = T \qquad \text{(A3.1)}$$

Esto significa que el valor de la estrategia en el momento t es su valor inicial más las ganancias o pérdidas de capital acumuladas. La segunda integral en esta última expresión tiene que interpretarse como una integral estocástica.

Antes de enunciar el resultado clave de esta sección necesitamos una definición: una oportunidad de arbitraje es una "trading strategy" (Φ_0, Φ_1) con coste inicial cero y con una probabilidad positiva de que en el momento T tenga valor positivo. Es una oportunidad sin riesgo de obtener provechos en una inversión y por tanto no puede subsistir en una economía en equilibrio.

Ahora estamos en condiciones de enunciar el principal hecho de nuestro modelo:

<u>Proposición 1</u> (ver Cox y Huang (1988), Harrison y Kreps (1979), ó Harrison y Pliska (1981)). Si nuestro sistema de precios (S_0, S_1) no permite oportunidades de arbitraje, existe una probabilidad Q sobre (? , *F*), equivalente a P, para la cual el precio descontado del primer activo $S^*_1(t) = S_1(t)/S_0(t)$ es una martingala. Además el recíproco es también cierto si nosotros permitimos estrategias Φ_1 para las cuales

$$E^*\left[?_0^t [\Phi_1(t)\, S^*_1(t)]^2\, dt \right] < 8$$

donde E* es el valor esperado bajo Q.

Una martingala sobre un espacio de medida (? , *F*, Q) con respecto a una filtración $F = (F_t)_t$ es un proceso estocástico $(X_t)_t$ cuyo valor esperado en una fecha futura es su valor actual

$$E_Q(X_s / F_t) = X_t \qquad \text{for } t = s$$

Un activo derivado se dice que es negociable si existe una estrategia autofinanciada que reduplica en cualquier momento el valor del activo derivado. Si un activo derivado es negociable su valor tiene que ser el precio de esta estrategia duplicante autofinanciada. Si no hay oportunidades de arbitraje, todas las estrategias duplicantes tienen que tener el mismo precio, y este activo derivado se dice valorado por arbitraje.

En la proposición 1, si la probabilidad equivalente Q bajo la cual S_1* es una martingala es única, entonces todo activo derivado tiene un único precio compatible con (S_0, S_1) que es el valor actual neto del futuro valor esperado bajo Q. En este caso Q se llama la *única martingala equivalente*.

II . LOS RESULTADOS

Queremos valorar un activo derivado X cuyo valor en un momento T, X(T) es una función continua g del valor ζ_T en el momento T de nuestro activo derivado: X(T) = g(ζ_T), y también encontrar la estrategia autofinanciada (cartera réplica) que genera X. Como los contratos forward no requieren ningún pago hasta el tiempo T, no necesitaremos negociar el activo sin riesgo después del momento 0. Bick (1988), cuyo artículo ha motivado éste, obtiene la "trading strategy" resolviendo una ecuación en derivadas parciales y calculando su precio para dar el valor de X en cualquier momento t.

A. La Fórmula de Valoración

En primer lugar, debemos encontrar la única martingala equivalente del modelo mencionado en la sección I.

Dado $S_0\,(t) = r^{-(T\,-t)}$

$$S_1\,(t) = \zeta_t\, r^{-(T\,-t)} = r^{-T} \exp\,[\,\mu + \ln\,(r) - \sigma^2/2)t + \sigma w(t)],$$

los precios descontados de nuestros activos son:

$$S_0^*\,(t) = 1$$

$$S_1^*\,(t) = S_1\,(t)\,/S_0\,(t) = \exp[\,\mu - \sigma^2/2)t + \sigma w(t)] \;= \zeta_t$$

Por el lema de Itô: $dS_1^*\,(t) = S_1^*(t)\,\mu(t, \zeta_t)\,dt + S_1^*\,(t)\,\sigma(t, \zeta_t)\,dw(t)$.

Sea $\eta\,(\omega) = \exp\left[\,- \int_0^T (\mu / \sigma)\, w\, dt - (1 / 2) \int_0^T (\mu / \sigma)^2\, dt\,\right]$

y $Q(A) = \int_A \eta\,(\omega)\, dP(\omega)$

para A perteneciente a *F*

Q es una medida de probabilidad sobre (? , *F*) equivalente a P. Si nosotros suponemos una condición técnica necesaria, por el teorema de Gisanov (ver Gisanov

(1960) y Harrison y Kreps (1979)), como w es un movimiento Browniano standard bajo P,

$$W^* (t) = W (t) + \int_0^t (\mu/\sigma)\, ds$$

es un movimiento Browniano estándar bajo Q.

$dW^* (t) = dW (t) + (\mu/\sigma)\, dt;$ $\qquad dS_1^* (t) = S_1^* (t) + \sigma dw^* (t)$

Aplicando otra vez el lema de Itô, obtenemos: $S_1 {}^*(t) = \exp [\sigma w^*(t) - \sigma^2 t/2]$ que se puede comprobar fácilmente es una martingala con respecto a Q. La demostración de la unicidad de Q es un resultado técnico estándar, y se puede encontrar en Cox y Huang (1986) y Harrison y Kreps (1979).

Para calcular el valor de X en cualquier momento t, sabemos

$$X^*(t) = X(t)/S_0(t) = E^*[X(s)/S_0(s) \mid F_t] \qquad \text{para } t = s \qquad \text{(A3.2)}$$

Para s = T: $\quad X(T) = g(\zeta_T) = g(\zeta_t \exp \{\sigma[w^* (T) - w^* (t)] - \sigma^2(T - t)/2\})$

y (A3.2) se convierte en: $\quad X^*(t) = r^{-(T -t)} X (t) = E^*[X (T)]$

Como w*(t) es un movimiento Browniano estándar con respecto a Q, w*(T) - w*(t) está Q-normalmente distribuido con media 0 y varianza T - t, y por tanto

$$X (t) = r^{-(T -t)} E^*[X (T) \}\mid F_t] =$$

$$= r^{-(T -t)} \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta_t e^{\sigma y - \sigma^2 (T - t)/2}) \frac{1}{\sqrt{2(T -t)}} \exp\left[\frac{y^2}{2(T-t)} \right] dy \qquad \text{(A3.3)}$$

dando el valor del activo derivado en el momento t.

B. La "Trading Strategy"

Nuestra siguiente tarea es determinar la "trading strategy" que produce el portfolio duplicante. Sabemos que

$$\zeta_t = \exp [-\sigma^2 t/2 + \sigma w^*(t)]; \quad \text{y} \quad d\zeta_t = \zeta_t \sigma dw^*(t)$$

El precio descontado de X es una función de t y de ζ_t :

$$X^*(T) = X(t)\, r^{-(T-t)} = f(t, \zeta_t) \qquad (A3.4)$$

Aplicando otra vez el lema de Itô (es fácil comprobar que f tiene suficientes propiedades diferenciales para que el lema pueda utilizarse), obtenemos[33](1).

$$f(t, \zeta_t) = f(0, \zeta_0) + \int_0^t (1/2\ \zeta^2{}_s\, \sigma^2 f_{\zeta\zeta} + f_t) ds + \int_0^t f_\zeta\, \zeta_s\, \sigma\, dw^*(s) \qquad (A3.5)$$

Para que f sea una martingala con respecto a Q, el término en dt tiene que ser 0, y por tanto f ha de ser la solución de la ecuación diferencial

$$(1/2)\, \zeta^2{}_s\, \sigma^2 f_{\zeta\zeta} + f_t = 0 \qquad (A3.6)$$

con las condiciones de contorno $F(T, S_T) = g(\zeta_t)$ y, por tanto, $f(t, \zeta_t)\exp[-r(T-t)]$ es el valor del activo derivado en el momento t. Desde luego estos resultados son los mismos que los obtenidos por Bick (1988), quedando clarificada la razón por la que f es la solución de (A3.6).

La condición de autofinanciación (A3.1) en el sistema descontado de precios puede escribirse como

$$V^*(t) = V(t) / S(t) = \Phi_0(0) + \Phi_1(0)\, S^*{}_1(0) + \int_0^t \Phi_1(s)\, dS^*{}_1(s)$$

La primera integral de (A3.1) aquí desaparece porque $dS_0{}^*(s) = 0$: las ganancias o pérdidas de capital descontadas al interés sin riesgo son cero.

De (A3.4) y (A3.5) obtenemos que

$$X^*(t) = X(t)/S_0(t) = f(t, \zeta_t) = f(0, \zeta_0) + \int_0^t f_\zeta\, \zeta_s\, \sigma\, dw^*(s) = f(0, \zeta_0) + \int_0^t f_\zeta\, dS_1{}^*(s)$$

y concluimos que: $\Phi_1(t) = f(t, \zeta_t)$

La posición en el activo sin riesgo tiene que ser el valor total de la cartera menos el valor del activo con riesgo: $\Phi_0(t) = f(t, \zeta_t) - f(t, \zeta_t)\, \zeta_t$

Mantener $f_\zeta(t, \zeta_t)$ unidades del activo principal en el momento t es equivalente a mantener $f_\zeta(t, \zeta_t)$ contratos forward y pagar $f_\zeta(t, \zeta_t)\, \zeta_t\, r^{-(T-t)}$ dólares. Pagar esta cantidad es equivalente a pagar $f_\zeta(t, \zeta_t)\zeta_t$ unidades del activo sin riesgo para lo cual es necesario comprar $f_\zeta(t, \zeta_t)\, \zeta_t - \int_0^t f_\zeta(s, \zeta_s)\, ds$ (la cantidad que tenemos que pagar menos los bonos que ya hemos ido acumulando hasta el tiempo t siguiendo esta estrategia. Para detalles técnicos ver Bick (1988)).

Así la estrategia (Φ_0, Φ_1) es equivalente a mantener en el momento t $f_\zeta(t, \zeta_t)$ contratos forward y

[33] ζ_s es el precio forward en el instante s, mientras que f_ζ y $f_{\zeta\zeta}$ son las derivadas parciales de f.

$$f(t, \zeta_t) - f_\zeta(t, \zeta_t)\, \zeta_t + f_\zeta(t, \zeta_t)\, \zeta_t - \int_0^t f_\zeta(t, \zeta_t)\, ds = f(0, \zeta_0)$$

unidades del activo sin riesgo. Como hizo notar Bick, esta estrategia no requiere ni genera fondos entre los momentos 0 y T.

Aunque este anexo es un poco más largo que el artículo de Bick (1988), nuestro propósito no era el probar los resultados de un modo diferente, sino profundizar en la utilización de la teoría de martingalas.

C. Un Ejemplo Particular

Nuestro último propósito es utilizar esta teoría para obtener la fórmula de Black (1976) para el valor de una opción compradora sobre un activo principal como función de los precios forward ζ_t de este activo. Esto no es otra cosa que la fórmula (A3.3) para g(X) = max (X-K, 0), donde K es el precio de ejercicio de la opción:

$$X(t) = r^{-(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \max\{\zeta_t e^{\sigma y - \sigma^2 (T-t)/2} - K, 0\} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left(-\frac{y^2}{2(T-t)}\right) dy$$

Sea $y^* = \log (K/\zeta_t) + \sigma^2 t/2$,

$$d_1 = \frac{-y^* + (T-t)\sigma}{\sqrt{(T-t)}} = \frac{\log(\zeta_t/K) + \sigma^2 (T-t)/2}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

y

$$d_2 = \frac{-y^*}{\sqrt{(T-t)}} = \frac{\log(\zeta_t/K) + \sigma^2 (T-t)/2}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

entonces

$$X(t) = r^{-(T-t)} \int_{y^*}^{\infty} (\zeta_t e^{\sigma y - \sigma^2 (T-\tau)/2} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left(-\frac{y^2}{2(T-t)}\right) dy =$$

$$= r^{-(T-t)} \left[\zeta_t \int_{-d_1}^{\infty} [1/\sqrt{2\pi}]\, e^{-\sigma^2/2} du - K \int_{-d_2}^{\infty} [1/\sqrt{2\pi}]\, e^{-\sigma^2/2} du\right] =$$

$$= r^{-(T-t)} \left[\zeta_t N(d_1) - K N(d_2)\right].$$ N(.) es la función de distribución normal estándar.

En este caso, la estrategia duplicante es obviamente comprar en el momento 0 X(0) unidades del activo sin riesgo, y mantener en cualquier momento t $X_\zeta(t, \zeta_t) = N(d_1)$ contratos forward.

Implícitamente, a lo largo de este anexo hemos supuesto que el pago final de nuestro activo derivado X(T) es una varible aleatoria con segundo momento finito. Pero el artículo puede generalizarse fácilmente permitiendo a X(T) pertenercer a L_p para p>1, con algunos cambios en nuestras fórmulas. Por ejemplo, la condición en la proposición 1 se convertiría en

$$E^* \left\{ \left[?^T_0 \, [\Phi_1(t) \, S^*_1 \, (t)]^2 \, dt \right]^{p/2} \right\} < 8$$

Como indicaron Cox y Huang (1986) el caso p = 1 no es tan claro como debe abordarse. Quizá se debiera sustituir L log L por L_1 (véase Stein (1969)).

Hemos valorado activos derivados sobre activos principales como función de los precios forward del activo. Como caso particular, cuando el activo derivado es una opción compradora, hemos obtenido la fórmula de Black (1976). También hemos obtenido la estrategia que produce un portfolio que reduplica en cualquier momento el valor del activo derivado.

La principal diferencia entre este anexo y otros artículos que tratan problemas similares es que nosotros hemos utilizado la teoría de valoración de martingalas desarrollada por Harrison y Kreps. Hemos intentado evitar al máximo las técnicas matemáticas y hemos procurado dar al lector las referencias necesarias.

REFERENCIAS

Ariño, Miguel A. y Pablo Fernández: "Valoración de activos financieros por el método de las martigalas", Investigaciones Económicas, Volumen XVI, nº 1, 1992.

Bick, A.: "Producing derivative assets with forward contracts". Journal of Financial and Quantitative Analyisis 23, 1988, págs. 153-160.

Black, F.: "The pricing of commodity contracts". Journal of Financial Economics 3, 1976, págs. 167-179.

Black, F., and M. Scholes: "The pricing of options and corporate liabilities". Journal of Political Economy 81, 1973, págs. 637-659.

Chung, K. L., *A Course in Probability Theory* (Second Edition). New York Academic Press, 1974.

Conze, A. y Wiswanathan: "Path Dependent Options: The case of Looback Options", Journal of Finance, 46, 1991, págs. 1893-1907.

Cox, J. and C. Huang: A Variational Problem Arising in Financial Economics. Sloan School of Management, Working Paper 1751-86, MIT, 1986.

Cox, J. and C. Huang: *Option Pricing Theory and its Applications. In Frontiers of Financial Theory*. Edited by G. Constantinides and S. Bhattacharya. Rowman and Littlefield. Totowa, New Jersey, 1988.

Cox, John C., y Stephen A. Ross, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", Journal of Financial Economics., Enero-Marzo 1976, pg. 145-166.

Cox, John y Mark Rubinstein: *Option Markets*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1985.

Duffie, D.: *Security Markets, Stochastic Models*. Academic Press, 1988.

Durret, R.: *Brownian Motion and Martingales in Analysis.* Belmont, California. Wadsworth Publishing Company, 1984.

Fernández, Pablo: *Opciones, futuros e instrumentos derivados*. Ediciones Deusto, Bilbao, 1996.

Girsanov, I.: On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures. Theory of Probability and its Aplications 5, 1960, págs. 285-301.

Harrison: *Brownian Motion and Stochastic Systems*, Wiley, New York, 1985.

Harrison, J. M. and M. Kreps: Martingales and Arbitrage in Multiperiod Security Markets. Journal of Economic Theory 20, 1979, págs. 381-408.

Harrison, J. M. and S. Pliska: Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading. Stochastic Processes and Their Applications 11, 1891, págs. 215-260.

Jarrow, Robert A., y Stuart M. Turnbull, *Derivative Securities*, International Thomson Publishing, 1996.

Lamothe, Prosper: *Opciones financieras. Un enfoque fundamental*. Ed. McGraw-Hill, Madrid, 1993.

Longin, François M., "Winning in the Best and Worst of Times: Boom and Crash Options", Working Paper, ESSEC, 1995.

Merton, R. C.: On the Pricing of Contigent Claims and the Modigliani-Miller Theorem. Journal of Financial Economics 5, 1977, págs. 241-249.

Rubistein y Reiner: "Breaking Down the Barriers", Risk 4(8), págs. 31-35.

Stein, E.: Note on the Class L Log L. Studia Mathematica 32, 1969, págs. 301-310.

Stoll, Hans, y Robert Whaley, *Futures and Options*, South-Western Publishing Co., Cincinaty, Ohio, 1993.

Stulz, R.: "Options on the Minimum or the Maximum of Two Risky Assets: Analysis and Aplications", Journal of Financial Economics 10, 1982, págs. 161-185.

Tan, Ken y Kenneth Vetzal: “Early Exercise Regions for Exotic Options”, Journal of Derivatives, Fall 1995, págs. 42-56.
Turnbull, Stuart M., “Interest Rate Digital Options and Range Notes”, Journal of Derivatives, Fall 1995, págs. 92-101.
Zhang, Peter: “Correlation Digital Options”, Journal of Financial Engineering, Volume 4, number 1, 1995.
Zhang, Peter, “Flexible Aritmetic Asian Options”, Journal of Derivatives, Spring 1995.